

BASIC DIFFERENTIAL GEOMETRY AS A SEQUENCE OF INTERESTING PROBLEMS

A. Skopenkov

Abstract. This paper is purely expository and is in Russian (sample English translation of two pages is given). It is shown how in the course of solution of interesting geometric problems (close to applications) naturally appear different notions of *curvature*, which distinguish given geometry from the ‘ordinary’ one. Direct elementary definitions of these notions are presented. The paper is accessible for students familiar with analysis of several variables, and could be an interesting easy reading for mature mathematicians. The material is presented as a sequence of problems, which is peculiar not only to Zen monasteries but also to elite mathematical education (at least in Russia).

*The modern world is full of theories which are proliferating
at a wrong level of generality, we’re so good at theorizing,
and one theory spawns another, there’s a whole industry
of abstract activity which people mistake for thinking.
I. Murdoch, The Good Apprentice.*

Scalar curvature.

1. Let $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ be a surface of revolution. Denote by $L(R)$ the length of the circle in Π of radius R centered at $P \in \Pi$. Prove that

(a) $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L(R)}{R^2} = 0$.

(b) there exists $\tau := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L(R)}{R^3}$. This is the **scalar curvature** of Π at P .

Main curvatures.

1. Let $A_1, \dots, A_s$ be points in $\mathbf{R}^3$ with masses $m_1, \dots, m_s$. The *inertia momentum* of this system w.r.t. a line l is the number $I(l) := m_1|A_1l|^2 + \dots + m_s|A_sl|^2$, where $|A_il|$ is the distance from A_i to l .

(a) Let I_+ and I_- be the maximal and the minimal value of the inertia momenta w.r.t. lines in the plane passing through a fixed point O (possibly, $I_+ = I_-$). Take one of the lines l_+ such that $I(l_+) = I_+$. Then $I(l) = I_+ \cos^2 \varphi + I_- \sin^2 \varphi$, где $\varphi = \angle(l, l_+)$.

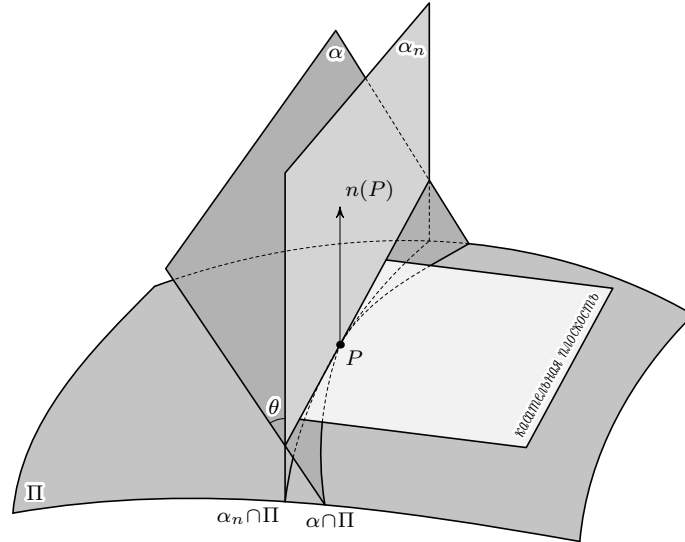


Figure: a normal and a ‘skew’ sections of a surface.

(b)* For each $O \in \mathbf{R}^3$ there are lines l_1, l_2, l_3 passing through O and such that for each line l passing through O we have $I(l) = I(l_1) \cos^2(\angle l, l_1) + I(l_2) \cos^2(\angle l, l_2) + I(l_3) \cos^2(\angle l, l_3)$.

A *coorientation* of a surface $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ is a field of unit length vectors $n(P)$ normal to Π ; the field should continuously depend on $P \in \Pi$.

A *curvature* of a (non-parametrized) curve on a cooriented surface is the normal projection of the acceleration of the unit length velocity motion on this curve.

Main curvatures λ_+ and λ_- of a cooriented surface $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ at $P \in \Pi$ are the maximal and the minimal values of the curvatures at P of (non-parametrized) curves on Π that are the intersection of Π and planes passing through $n(P)$. The corresponding planes are denoted by α_+ and α_- .

2. How do main curvatures change under

(a) change of the coorientation to the opposite?

(b) dilatation of the space?

3. (a) *The Euler formula.* Let $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ be a cooriented surface and $P \in \Pi$. Denote by $k(\varphi)$ the curvature at P of the curve on Π that is the intersection of Π and the plane passing through $n(P)$ and making the angle φ to the plane α_+ (for which such a curvature is maximal). Then $k(\varphi) = \lambda_+ \cos^2 \varphi + \lambda_- \sin^2 \varphi$.

(b) If $\lambda_+ \neq \lambda_-$, then $\alpha_+ \perp \alpha_-$.

(c) State and prove the analogue of (a) for a cooriented 3-dimensional surface $\Pi \subset \mathbf{R}^4$.

4. (a) What is the ratio of curvatures for the intersection curves of a surface with two planes (α and α_n in Fig. 2) containing P and intersecting the tangent plane by the same line, if α_n passes through the normal vector at P and α makes angle θ to the normal vector?

(b) The normal projection at $P = \gamma(0)$ of the acceleration of a parametrized curve γ on a surface Π depends only on the velocity $\gamma'(0)$ of this curve at P .

5.* $\tau = 2\lambda_+\lambda_-$.

Hints.

1a and 3a. Follow because both inertia moment and the curvature have the form $f(\varphi) = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi$.

1b and 3c. Follow because both inertia moment and the curvature are quadratic forms (prove this!).

3b. Denote $n = n(\gamma(t))$. Then

$$n \cdot \gamma' = 0 \quad \Rightarrow \quad n' \cdot \gamma' + n \cdot \gamma'' = 0 \quad \Rightarrow \quad n \cdot \gamma'' = -\gamma' \cdot \partial n / \partial \gamma'.$$

4a. *The Meunier Theorem.* $k \cos \theta = k_n$. Follows by 4b.

A simple geometric definition of the scalar and the Ricci curvatures.

Let $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ be an n -dimensional surface in $\mathbf{R}^m$ (a reader not familiar with surfaces can consider surfaces of revolution, which case is interesting enough).

If $n = 2$, for $P \in \Pi$ denote by $L_{\Pi, P}(R)$ the length of the circle in Π of radius R centered at $P \in \Pi$. The **scalar curvature** of Π at P is the number

$$\tau = \tau_{\Pi, P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L_{\Pi, P}(R)}{\pi R^3}.$$

One can prove that this limit indeed exists.

A (non-parametrized) curve $\Gamma \subset \Pi$ is called a **geodesic** on Π , if Γ is *locally shortest*, i.e., if each point $x \in \Gamma$ has a neighborhood $U \subset \Pi$ such that the distance (along Π) between any two points $y_1, y_2 \in U \cap \Gamma$ is equal to the length of a segment of Γ from y_1 to y_2 .

For $P \in \Pi$ denote by T_P the plane tangent to Π at the point P . Define a **(geodesic) exponential map**

$$\exp = \exp_P : T_P \rightarrow \Pi \quad \text{by} \quad \exp(u) := \gamma_{P,u}(1),$$

where $\gamma_{P,u} : [-1, 1] \rightarrow \Pi$ is the geodesic for which $\gamma_{P,u}(0) = P$ and $\gamma'_{P,u}(0) = u$.

The Ricci curvature of Π at $P \in \Pi$ is a bilinear form $\rho = \rho_P : T_P \times T_P \rightarrow R$ such that for each unit n -dimensional cube $A \subset T_P$ with vertex at P we have

$$V(\exp_P(hA)) = h^n - \frac{h^{n+2}}{6} \int_A \rho(u, u) du + O(h^{n+3}) \quad \text{when} \quad h \rightarrow 0.$$

One can prove that

- such a quadratic form indeed exists and is unique.
- analogous formula with h^n replaced by $h^n V(A)$ (h^{n+2} and h^{n+3} do not change) holds for each measurable subset $A \subset T_P$.
- $\tau = \text{tr } \tilde{\rho}$, where linear operator $\tilde{\rho} : T_P \rightarrow T_P$ is well-defined by $\tilde{\rho}(u) \cdot v = \rho(u, v)$.
- $2\rho(u, u) = \sum_i \tau_i$, where $|u| = 1$, $e_1, \dots, e_{n-1}$ is an orthonormal base in the orthogonal complement to u in T_P and τ_i is the scalar curvature at P of the 2-dimensional surface $\exp_P \langle u, e_i \rangle$.

[1] L. Bessieres, G. Besson, M. Boileau, La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman, Images des Mathématiques, 2006. <http://www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/IdM2006.htm>

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧАХ

А. Б. Скопенков¹

Аннотация. Показано, как при решении интересных геометрических проблем, близких к приложениям, естественно возникают различные понятия *кривизны*, отличающей изучаемую геометрию от 'обычной'. Приведены прямые элементарные определения этих понятий. Брошюра предназначена студентам, аспирантам, работникам науки и образования, изучающим и применяющим дифференциальную геометрию. Для ее изучения достаточно владения основами анализа функций нескольких переменных (а во многих местах не нужно даже этого). Материал преподнесен в виде циклов задач. (Это характерно не только для дзенских монастырей, но и для качественного преподавания математики, по крайней мере, в России.)

*The modern world is full of theories which are proliferating
at a wrong level of generality, we're so good at theorizing,
and one theory spawns another, there's a whole industry
of abstract activity which people mistake for thinking.
I. Murdoch, The Good Apprentice.*

Содержание.

Введение. Зачем. — Советы и соглашения. — Литература.

Кривизны кривых. Кривые. — Кривизна кривых. — Кручение пространственных кривых.

Числовые кривизны поверхностей. Поверхности. — Внутренняя изометрия. Скалярная кривизна. — Площадь поверхности. — Скалярная кривизна (обобщение). — Главные кривизны. — Полная средняя кривизна. — Средняя кривизна в точке. — Полная гауссова кривизна. — Гауссова кривизна в точке. — Геодезические. — Параллельный перенос. — Секционная кривизна.

Полилинейные кривизны поверхностей. Длины кривых на поверхностях. — Риманова метрика. Применение к изометриям. — Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма). — Билинейная форма кривизны Риччи. — Тензор кривизны Римана.

Ковариантное дифференцирование. Примеры тензорных полей. — Ковариантное дифференцирование функций. — Коммутатор векторных полей. — Ковариантное дифференцирование векторных полей. — Ковариантное дифференцирование тензорных полей.

Обобщение. Элементы гиперболической геометрии Лобачевского. — Геометрия на римановых многообразиях.

¹<http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps>

Зачем.

Приводимые задачи подобраны так, что в процессе их решения (и обсуждения) читатель увидит, как при решении интересных геометрических проблем, близких к приложениям, естественно возникают различные понятия *кривизны*, отличающей изучаемую геометрию от 'обычной'.² Дальнейшие знания читатель сможет почерпнуть в книгах из списка литературы.

Особенность этого текста — возможности познакомиться с некоторыми *мотивировками* и *идеями* дифференциальной геометрии при сведении к необходимому минимуму ее *языка*.

Я старался давать определения так, чтобы сразу было ясно, что определяемый объект интересен. А методы вычисления уже интересных (по самому их определению) объектов формулировать в виде теорем. (Часто изучение материала затрудняется тем, что *вычислительные формулы* преподносятся в виде *определений*, которые становятся немотивированными.) Вместо *абстрактных общих понятий* (например, тензора и ковариантного дифференцирования) рассматриваются их *конкретные используемые в курсе частные случаи*, а обобщение остается в виде задач, которые естественны и легки для читателя, разобравшегося с частными случаями. (Изучение 'от общего к частному' часто приводит к абсурдному эффекту: сдающие курс воспроизводят громоздкое определение, но не могут по этому определению привести ни одного содержательного примера определяемого объекта.)

Простейшие кривизны — числовые поля, более сложные — поля квадратичных форм, а тензор кривизны Римана ('это маленькое чудовище полилинейной алгебры' по словам М. Громова) — поле четырехлинейных форм. В этом курсе даются прямые геометрические определения сначала первых, затем вторых и потом третьего. Конечно, простейшие кривизны выражаются через более сложные (и такие выражения часто удобны для *вычисления* простейших кривизн), но *определение* простых понятий через более сложные затрудняет изучение материала.

Ввиду прозрачной геометрической мотивированности изучаемых понятий изложение в основном синтетично и бескоординатно. Несмотря на стремление к ясности и ориентированность на приложения (а точнее, как раз в силу такого стремления), я старался поддержать достаточно высокий уровень строгости. Например, четко различаются параметризованные и непараметризованные кривые и поверхности (отсутствие их четкого различия мешает начинающим, хотя допустимо и удобно для специалистов).

Принятый стиль изложения отвечает духу К. Ф. Гаусса (и других первооткрывателей), много занимавшегося приложениями и превратившего один из разделов географии в данный раздел математики. Изложение 'от простого к сложному' и в форме, близкой к форме рождения материала, продолжает устную традицию, восходящую к Лао Цзы и Платону, а в современном преподавании математики представленную, например, книгами Д. Пойа и журналом 'Квант'.

Мне кажется, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус с тем, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибок (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое

²Тем самым он освоит основы дифференциальной геометрии (в частности, большую часть курса, изучаемого на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова — кроме интегрирования дифференциальных форм и основ топологии).

(бессознательное) сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах (происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями).

Чтение этого текста и решение задач потребуют от большинства читателей усилий (впрочем, некоторые читатели данного текста жаловались, что в нем нет серьезных задач, а есть лишь тривиальные упражнения). Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками в процессе изучения интересных геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия и теоремы дифференциальной геометрии. Надеюсь, это поможет читателю совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Данный текст основан на лекциях и семинарах, которые автор вел на мехмате МГУ в 2004-2007 годах и в летней школе 'Современная Математика' в 2007 году. Некоторые его фрагменты были представлены на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (рук. акад. РАН А. Т. Фоменко) и на семинаре по геометрии в МЦНМО (рук. д.ф.м.н. В. Ю. Протасов). Благодарю А. Иванова, С. Маркелова, А. Ошемкова, А. Пляшечника, В. Прасолова, А. Толченникова, Ю. Торхова, Г. Челнокова и всех слушателей (точнее, решателей) курсов за полезные замечания и обсуждения.

Советы и соглашения.

Приводимые определения кривизн *независимы друг от друга*. Поэтому после изучения поверхностей можно сразу изучать *любую* из вводимых здесь кривизн (для скалярной, средней и гауссовой кривизн необходимо еще понятие площади, для секционной и римановой — параллельного переноса, а для риччиевой — геодезических и экспоненциального отображения). При этом, естественно, задачи о связи изучаемой кривизны с еще не изученными придется отложить на потом.

Для понимания условий и для решения задач достаточно уверенного владения основами анализа функций нескольких переменных (и, чем дальше, тем больше, линейной алгебры). Все необходимые *новые* определения приводятся здесь. Кое-где требуется также теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Важные факты выделены словом 'теорема' или 'следствие'. Иногда подсказками являются соседние задачи; указания даются в конце каждой темы. Факты, для доказательства которых читателю может понадобиться литература (или консультация специалиста), приводятся со ссылками. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Рассматриваемые понятия и факты интересны, полезны и нетривиальны даже для поверхностей вращения и графиков функций (в основном в трехмерном пространстве), а также для поверхностей многогранников. Например, инвариант Дена, с помощью которого была решена 3-я проблема Гильберта, тесно связан со средней кривизной поверхности многогранника. Поэтому не приводится примеров более сложных поверхностей (кроме плоскости Лобачевского в самом конце). Однако для хорошего понимания материала читателю будет полезно изучить такие примеры [Ra03, MF04].

Заданные в условиях функции предполагаются бесконечно дифференцируемыми, если не оговорено противное. Определения даются в предположении, что используемые в них пределы (в частности, производные) существуют. Через $\cdot$, $\times$ и $\wedge$ обозначаются скалярное, векторное и смешанное (не путайте с внешним!) произведения, соответственно.

Литература.

- [BBB06] L. Bessieres, G. Besson, M. Boileau, La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman, Images des Mathematiques, 2006.
<http://www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/IdM2006.htm>
- [Ca28] E. Cartan, Géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1928. Рус. перевод: Э. Картан, Геометрия римановых пространств, Ленинград, 1936.
- [Gr90] A. Gray, Tubes. Addison-Wesley, 1990. Рус. перевод: А. Грей, Трубки, Наука, Москва, 1997.
- [Gr94] M. Gromov, Sign and geometric meaning of curvature, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 61 (1991), 9-123 (1994). Рус. перевод: М. Громов, Знак и геометрический смысл кривизны, НИЦ 'Регулярная и хаотическая динамика', Ижевск, 2000.
- [MSF04] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев и А. Т. Фоменко, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Физматлит, 2004.
- [MF04] А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко, Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Физматлит, 2004.
- [Pr] В. В. Прасолов, Курс дифференциальной геометрии, готовится к публикации.
- [Ra03] П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, Москва, УРСС, 2003.
- [Ra04] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, УРСС, 2004.
- [Sk10] А. Скопенков, Объемлемая однородность, скоро появится на <http://arxiv.org/>
- [Ta89] С. Л. Табачников, О кривизне, Квант, 1989, N5; Дифференциальная геометрия вокруг нас, Квант, 1989, N11. <http://kvant.mirror0.mccme.ru/>
- [To82] Дж. Торп, Начальные главы дифференциальной геометрии, Москва, Мир, 1982.
- [Vi92] Н. Я. Виленкин, О кривизне, Квант, 1992, N4. <http://kvant.mirror0.mccme.ru/>

КРИВИЗНЫ КРИВЫХ

Кривые.

Будем обозначать точкой производную по t , а штрихом производную по *натуральному параметру* (когда это понятие появится).

1. Нарисуйте следующие кривые на плоскости (в пространстве) и найдите их параметрические уравнения $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ или $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$ в декартовых или полярных координатах на плоскости; $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ или $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$ или $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), \theta(t))$ в декартовых, цилиндрических или сферических координатах в пространстве.

(0) *Парабола* — кривая, по которой падает брошенный со скоростью v м/с параллельно земле мячик под действием силы тяжести (без учета сопротивления воздуха etc.), или множество точек плоскости, равноудаленных от данной прямой (*директрисы*) и данной точки (*фокуса*).

(а) Луч OA равномерно вращается вокруг своего неподвижного начала O с угловой скоростью ω . Точка M равномерно движется по лучу OA , начиная из точки O , со скоростью v . Описываемая точкой M кривая называется *спиралью Архимеда*.

(b) *Винтовая линия* — траектория конца стержня длины $2r$, равномерно со скоростью v падающего на землю, остающегося параллельным поверхности земли и одновременно вращающегося в горизонтальной плоскости вокруг своей середины равномерно с угловой скоростью ω .

(с) Колесо радиуса R катится равномерно без проскальзывания по прямой. Описываемая точкой на ободе колеса кривая называется *циклоидой*.

(d) *Эллипс* — множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (*фокусов*) равна фиксированной величине d , большей расстояния f между фокусами.

(е) По какой кривой движется электрон в постоянном магнитном поле, если начальная скорость электрона не параллельна и не перпендикулярна напряженности H , где H — постоянный вектор? (Закон Био-Савара-Лапласа движения электрона утверждает, что $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \times H$.)

(f)* *Локсодромия* — траектория путешественника, движущегося по поверхности Земли (которая считается сферой) из точки на пересечении экватора с Гринвичским меридианом все время на северо-восток (то есть все время под углом 45° к текущему меридиану). Широта путешественника возрастает равномерно. Перед выводом уравнения нарисуйте этот путь на сфере и на карте.

(g)* *Цепная линия* — это кривая, форму которой под действием силы тяжести принимает нерастяжимая нить с закрепленными концами.

(h) *Кривая Вивiani* — пересечение сферы радиуса R и прямого кругового цилиндра диаметра R , одна из образующих которого проходит через центр сферы.

(i)* *Астроида* — кривая, для которой длина отрезка касательной в произвольной точке, заключенного между осями координат, постоянна и равна a .

(j) Окружность радиуса R катится без проскальзывания снаружи по окружности того же радиуса R . Кривая, описываемая точкой на внешней окружности, называется *кардиоидой*.

Параметризованной гладкой регулярной кривой на плоскости называется гладкое (т.е. бесконечно дифференцируемое) отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которого скорость $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ при любом t .

Непараметризованной гладкой регулярной кривой на плоскости называется подмножество плоскости, являющееся образом некоторой параметризованной гладкой регулярной кривой.

Далее прилагательные 'гладкая регулярная' опускаются. (Формально в данном тексте они не имеют отдельного от словосочетания 'гладкая регулярная кривая' смысла).

Параметризацией непараметризованной кривой $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ называется любая параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которой $\Gamma = \gamma[a, b]$. Часто параметризованную кривую называют *параметризацией*, а непараметризованную кривую называют *кривой*.

Аналогично определяются кривые в пространстве.

2. (a) Приведите пример не взаимно однозначной параметризации γ окружности Γ .

(b) Приведите пример двух разных взаимно однозначных параметризаций γ_1 и γ_2 одной непараметризованной кривой Γ .

(c) Напишите определение параметризованной кривой, непараметризованной кривой и ее параметризации в пространстве.

(d)* Постройте бесконечно дифференцируемое отображение $\gamma = (x, y) : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, образом которого является прямой угол (т.е. объединение отрезков $0 \times [0, 1]$ и $[0, 1] \times 0$).

Длиной параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ (или $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$) называется число

$$L(\gamma) := \sup\{|A_0A_1| + |A_1A_2| + \dots + |A_{n-1}A_n| : a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b, A_i := \gamma(a_i)\}.$$

3. (a) Длина графика дважды дифференцируемой функции $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ равна $\int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2} dt$.

(b) **Теорема.** Длина плоской параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, равна

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

4. Вычислите длины параметризованных кривых от $\gamma(a)$ до $\gamma(b)$ для выбранных Вами параметризаций (укажите параметризацию явно!)

(a) винтовой линии; (b) параболы; (c) спирали Архимеда; (d) циклоиды.

5. Найдите формулу для длины параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ в

(a) полярных; (b) сферических; (c) цилиндрических координатах.

Длиной непараметризованной кривой Γ , имеющей взаимно однозначную (т.е. не имеющую самопересечений) параметризацию $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ (или $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$), называется длина параметризации γ .

6. **Теорема.** Приведенное определение корректно, т.е. если γ_1 и γ_2 — две взаимно однозначные параметризации одной непараметризованной кривой Γ , то $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Предостережение: если при доказательстве Вы используете формулу для длины параметризации, то не забудьте доказать, что отображение $\gamma_1\gamma_2^{-1} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ имеет в каждой точке положительную производную. Впрочем, проще доказывать *по определению* длины параметризованной кривой.

Кривизна кривых.

В задачах с явным физическим содержанием следует пренебрегать размерами движущихся объектов (т.е. считать их материальными точками) и т. п.

0. Если велосипедист движется по криволинейной дороге с постоянной по модулю скоростью, то в любой точке его ускорение перпендикулярно его скорости (т.е. их скалярное произведение равно нулю).

1. (а) Мотоциклист хочет проехать по винтовой линии с параметрами $r = 10\text{м}$, $v = 100\text{м/с}$ и $\omega = 2\pi\text{с}^{-1}$, ось которой параллельна поверхности Земли. С какой постоянной скоростью он должен ехать, чтобы не упасть?

Предостережение: уравнение винтовой линии не обязательно будет уравнением движения мотоциклиста.

(b) Американская горка имеет форму циклоиды, находящейся в вертикальной плоскости. Вагончик движется по ней со скоростью 1 м/с . При какой высоте циклоиды в ее верхней точке клиент будет чувствовать невесомость? Почему нереалистичен полученный Вами ответ?

(с) Автомобиль едет по отрезку спирали Архимеда $r = \varphi \cdot 1\text{м}$ со скоростью 1 м/с , не пересекая реку, т.е. луч $\varphi = 0$. С какой угловой скоростью вращается берег реки в системе отсчета автомобиля, когда тот находится в точке с $\varphi = \pi/2$?

(d) Дан эллипс с параметрами $d = 2$ и $f = 1$. Найдите радиус соприкасающейся окружности в точке эллипса, равноудаленной от фокусов.

Окружность называется *соприкасающейся* с кривой в точке A кривой, если эта окружность лучше всех окружностей приближает кривую, т.е. если эта окружность проходит через точку A , имеет общую с кривой касательную в точке A и общее с кривой ускорение в точке A при натуральной параметризации обеих кривых. (Если в некоторой декартовой системе координат дуга окружности, содержащая точку A , имеет уравнение $y = g(x)$, и дуга кривой, содержащая точку A , имеет уравнение $y = f(x)$, то условие соприкасания равносильно тому, что для некоторого $x_0 \in \mathbf{R}$ выполнено $A = (x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$.)

Скоростью (или *производной*) параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, в точке $t \in [a, b]$ называется вектор $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$.

Параметризованная кривая называется *натуральной*, если модуль ее скорости равен 1 в любой точке или, эквивалентно, если ее длина от 0 до s равна s для любого s . Натуральную параметризованную кривую будем обозначать через σ (а не γ).

Ускорением (или *второй производной*) параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, в точке $t \in [a, b]$ называется вектор $\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$.

2. (а) Для натуральной кривой ускорение перпендикулярно скорости в любой точке.

(b) Найдите натуральную параметризацию винтовой линии в виде $\sigma(s) = (x(s), y(s), z(s))$.

(с) То же для циклоиды в виде $\sigma(s) = (x(s), y(s))$.

(d) Любая непараметризованная кривая, имеющая взаимно однозначную параметризацию (т.е. параметризацию без самопересечений), имеет единственную (с точностью до сдвига) натуральную параметризацию.

(е) Приведите пример непараметризованной кривой с одной точкой самопересечения, имеющей более одной натуральной параметризации.



Рисунок 0: кривизна кривой

Зафиксируем ориентацию плоскости. **Кривизной** в точке s_0 плоской натуральной параметризованной кривой σ называется число $k(s_0)$, равное по модулю числу $|\sigma''(s_0)|$ и

совпадающее с ним (или противоположное ему) по знаку, если векторы $\sigma'(s_0)$ и $\sigma''(s_0)$ образуют положительный (отрицательный) базис. Иными словами, $k(s_0) := \sigma'(s_0) \wedge \sigma''(s_0)$. **Кривизной** в точке $A = \sigma(s_0)$ непараметризованной кривой Γ с натуральной параметризацией σ называется число $k(A) := k(s_0)$.

3. (а) Кривизна натурально параметризованной кривой равна угловой скорости вращения вектора скорости.

(б) Теорема. Кривизна непараметризованной кривой с произвольной параметризацией γ в точке $\gamma(t)$ равна отношению проекции ускорения $\ddot{\gamma}(t)$ на прямую, перпендикулярную скорости $\dot{\gamma}(t)$, к квадрату модуля скорости:

$$k(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|^{3/2}},$$

где аргумент t функций в правых частях пропущен.

Два подмножества пространства $\mathbf{R}^n$ называются *объемлемо изометричными*, если между ними существует *объемлемая изометрия* (движение), т.е. сохраняющее расстояния (в $\mathbf{R}^n$!) отображение $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, переводящее первое подмножество во второе.

4. (а) Теорема. Для любой функции $\bar{k} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ существует и единственна (с точностью до объемлемой изометрии) плоская натуральная параметризованная кривая $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которой $k(\sigma(s)) = \bar{k}(s)$.

(б) Следствие. Две плоские несамопересекающиеся непараметризованные кривые объемлемо изометричны тогда и только тогда, когда функции кривизны их натуральных параметризаций отличаются сдвигом и, возможно, знаком, т.е. когда существует число a , для которого либо $\sigma_2(s) = \sigma_1(s + a)$ при любом s , либо $\sigma_2(s) = \sigma_1(-s + a)$ при любом s .

(с) То же, что в (б), для замкнутых кривых.

(d)* Функция $\bar{k} : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ кривизны замкнутой плоской параметризованной кривой $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ имеет по крайней мере четыре (нестрогих) экстремума.

(е)* Для любой функции $\bar{k} : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$, имеющей по крайней мере четыре (нестрогих) экстремума, существует и единственна (с точностью до объемлемой изометрии) замкнутая плоская натуральная параметризованная кривая $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которой $k(\sigma(s)) = \bar{k}(s)$.

(f) Какие гладкие плоские несамопересекающиеся кривые N имеют следующее свойство: для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение плоскости, переводящее x в y , а N в себя? Ср. [Sk10].

(g) То же для пространственного случая.

Скорость параметризованной кривой и натуральная параметризация определяются для пространства $\mathbf{R}^3$ (или $\mathbf{R}^n$) аналогично случаю плоскости.

Кривизной в точке s_0 пространственной натуральной параметризованной кривой σ называется число $k(s_0) := |\sigma''(s_0)|$. Кривизна пространственной непараметризованной кривой определяется дословно так же, как плоской.

Заметим, что кривизна кривой, рассматриваемой как кривая в плоскости, может отличаться знаком от кривизны той же кривой, рассматриваемой в пространстве.

5. $k(\gamma(t)) = |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|^3$ для пространственной параметризованной кривой γ .

Указания.

1. (b) Пусть уравнение циклоиды $\gamma(t)$, а уравнение движения вагончика по ней $\sigma(s)$, причем $\sigma(0) = \gamma(0)$. Далее см. указание к 3б.

(с) См. 3а.

3. (а) Пусть σ — наша кривая. Обозначим $\alpha(s) := \angle(\sigma'(s), Ox)$. Тогда $\sigma'(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$. Значит, $\sigma''(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s))\alpha'(s)$. Поэтому $\alpha'(s) = k(\sigma(s))$.

(б) В этом решении производные вектор-функции γ берутся по параметру t в точке t , а производные вектор-функции σ берутся по параметру s в точке $l(t) := \int_0^t |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Так как $|\sigma'| = 1$, то $\dot{\gamma} = \sigma'|\dot{\gamma}|$. (Интегрируя это соотношение, получаем $\sigma(l(t)) = \gamma(t)$.) Дифференцируя это соотношение и используя $\dot{l} = |\dot{\gamma}|$, получаем $\ddot{\gamma} = \sigma''|\dot{\gamma}|^2 + \sigma'|\dot{\gamma}|'_t$. Из этого и $\sigma'' \perp \dot{\gamma}$ вытекает $\ddot{\gamma} \wedge \dot{\gamma} = \sigma''|\dot{\gamma}|^2 \wedge \dot{\gamma} = -k|\dot{\gamma}|^3$.

4а. Пусть σ — искомая кривая. Возьмем систему координат Oxy , для которой $\sigma(0) = (0, 0)$ и ось Ox сонаправлена с $\sigma'(0)$. Определим функции $x, y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ равенством $\sigma(s) = (x(s), y(s))$. Обозначим $\alpha(s) := \angle(\sigma'(s), Ox)$. Тогда $\sigma'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$. По 3а $\alpha'(s) = k(\sigma(s))$. Поэтому для построения искомой кривой нужно взять

$$\alpha(s) = \int_0^s k(s) ds, \quad x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds \quad \text{и} \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds.$$

Кручение пространственных кривых.

1. В невесомости мотоциклист едет со скоростью 1 по винтовой линии с параметрами r, v и ω . Найдите угловую скорость $\Omega(t)$ вращения плоскости колеса (содержащей векторы скорости и ускорения) в зависимости от времени.

Параметризованная кривая γ называется *бирегулярной*, если векторы $\dot{\gamma}(t)$ и $\ddot{\gamma}(t)$ линейно независимы для любого t . Непараметризованная кривая γ называется *бирегулярной*, если она имеет бирегулярную параметризацию.

2. (а) Приведите пример (гладкой регулярной) непараметризованной кривой, не являющейся бирегулярной.

(б) Две параметризованные кривые с одинаковым образом бирегулярны или нет одновременно.

3. (а) При каких a образ параметризованной кривой $\gamma(t) = (e^t, 2e^{-t}, e^{at})$ лежит в некоторой плоскости?

(б) Образ параметризованной бирегулярной кривой γ лежит в некоторой плоскости тогда и только тогда, когда $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \wedge \dddot{\gamma}(t) = 0$ для любого t .

Кручением в точке s_0 пространственной бирегулярной натуральной параметризованной кривой σ называется угловая скорость $\varkappa(s_0)$ вращения *соприкасающейся* плоскости (т.е. плоскости, содержащей векторы скорости и ускорения). Эта скорость берется со знаком плюс (минус), если векторы скорости, ускорения и производной от ускорения образуют положительный (отрицательный) базис.

4. Напишите определение кручения непараметризованной бирегулярной кривой.

5. Пусть σ — бирегулярная натуральная параметризованная кривая. В этой задаче производные берутся по ее параметру s . Обозначим $v := \sigma'$ и $n := \sigma''/|\sigma''|$; v и n называются векторами *скорости* и *нормали* и вместе с $v \times n$ образуют *репер Френе*.

(а) $\sigma'' \neq 0$ (т.е. определение вектора нормали корректно).

(б) $n' = -kv$ для плоского случая. Эта формула вместе с формулой $v' = kn$ называются *формулами Френе на плоскости*.

(с) $\varkappa$ равно проекции вектора n' на направленную ось, перпендикулярную векторам скорости и ускорения: $\varkappa = n' \cdot (v \times n) = v \wedge n \wedge n'$.

(д) $n' = -kv + \varkappa(v \times n)$.

(е) $b' = -\frac{\varkappa}{k}\sigma''$, где $b := \sigma' \times \sigma''/|\sigma''|$.

Формулы из п. (d) и (e) вместе с формулой $v' = kn$ называются *формулами Френе в пространстве*.

6. (a) $\varkappa = \frac{\sigma' \wedge \sigma'' \wedge \sigma'''}{k^2}$ для бирегулярной натуральной параметризованной кривой σ .
 (b) $\varkappa(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}$ для бирегулярной параметризованной кривой γ (не обязательно натуральной; аргумент t функций в правой части пропущен).

(с)* **Теорема.** Для любых функций $\bar{k} : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ и $\bar{\varkappa} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ существует и единственна пространственная бирегулярная натурально параметризованная кривая $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, для которой $k(\sigma(s)) = \bar{k}(s)$ и $\varkappa(\sigma(s)) = \bar{\varkappa}(s)$.

Указание: для заданных функций $\bar{k}$ и $\bar{\varkappa}$ пара векторов (v, n) однозначно определена ввиду формул Френе $v' = kn$ и $n' = -kv + \varkappa(v \times n)$.

(d) Сформулируйте и докажите аналог следствия 4b из предыдущей темы для пространственных кривых.

Указания.

1. Угловая скорость вращения плоскости равна угловой скорости вращения вектора, нормального к этой плоскости. Если плоскость содержит векторы скорости и ускорения, то этот нормальный вектор равен векторному произведению векторов скорости и ускорения. Уравнение винтовой линии $\gamma(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, vt)$. Обозначим $\bar{\omega} := \frac{\omega}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\omega}{\sqrt{r^2 \omega^2 + v^2}}$. Тогда уравнение движения мотоцикла $\sigma(s) = (r \cos \bar{\omega} s, r \sin \bar{\omega} s, \frac{v s \bar{\omega}}{\omega})$. Находим

$$\sigma'(s) = (r \bar{\omega} \sin \bar{\omega} s, r \bar{\omega} \cos \bar{\omega} s, \frac{v s \bar{\omega}}{\omega}), \quad \sigma''(s) = (-r \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} s, r \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} s, 0).$$

Отсюда получаем ответ $\Omega(t) = \frac{v \omega}{\sqrt{v^2 + r^2 \omega^2}}$.

2. (a) Прямая.

(b) Замена параметра меняет только касательную составляющую вектора скорости.

5b. Угловая скорость вращения вектора n равна угловой скорости вращения вектора v , поскольку эти векторы перпендикулярны.

6b. В этом решении производные вектор-функции γ берутся по параметру t в точке t , а производные вектор-функций σ и b берутся по параметру s в точке $l(t) := \int_0^t |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Кручение равно угловой скорости вращения (по параметру s) вектора $b(s) := \frac{\sigma' \times \sigma''}{|\sigma''|}$. Так $|b(s)| = 1$, то $\varkappa(\gamma(t)) = |b'|$. Так как плоскости, образованные парами векторов (σ', σ'') и $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$, совпадают, то $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \nu b$, где $\nu := |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|$. Дифференцируя по t , получаем $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \nu b' |\dot{\gamma}| + \nu_t b$. Умножая скалярно на $\dot{\gamma}$, получаем

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} = \nu |\dot{\gamma}| b' \cdot \ddot{\gamma} = \frac{\nu |\dot{\gamma}| \varkappa \nu}{|\dot{\gamma}|} = \nu^2 \varkappa.$$

Здесь последнее равенство выполнено, поскольку $b' \perp \dot{\gamma}$ и $b' \perp b$, откуда $b' \parallel \sigma''$.

ЧИСЛОВЫЕ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхности.

Под (непараметризованной) *поверхностью* далее можно понимать поверхность вращения (графика бесконечно дифференцируемой положительной функции).

Приведем более общее определение. Пусть D — замкнутый круг или прямоугольник на плоскости.

Несамопересекающейся компактной гладкой регулярной параметризованной поверхностью с краем называется такое бесконечно дифференцируемое отображение $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ (или, что то же самое, упорядоченная тройка отображений $x, y, z : D \rightarrow \mathbf{R}$), которое инъективно (т.е. взаимно однозначно с образом) и производная которого (т.е. пара векторов (r_u, r_v)) линейно независима при любых $(u, v) \in D$.

Все встречающиеся параметризованные поверхности считаются несамопересекающимися компактными гладкими регулярными, и эти прилагательные опускаются (смысл каждого из этих прилагательных по отдельности в курсе не используется и потому не определяется).

Элементарной (несамопересекающейся компактной гладкой регулярной) непараметризованной поверхностью с краем называется образ $r(D)$ параметризованной поверхности r с краем. Эту параметризованную поверхность называют *параметризацией* образа $r(D)$, или *параметрическим уравнением* образа $r(D)$ (или *системой координат* с координатным пространством D на $r(D)$).

Непараметризованной поверхностью (несамопересекающейся компактной гладкой регулярной) называется ограниченное подмножество $\Pi \subset \mathbf{R}^3$, для любой точки $P \in \Pi$ которого существует такая ее замкнутая окрестность OP в $\mathbf{R}^3$, что $\Pi \cap OP$ является элементарной непараметризованной поверхностью с краем. Далее *несамопересекающаяся компактная гладкая регулярная непараметризованная поверхность* называется сокращенно **поверхностью**.

Поверхности произвольной размерности в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$ произвольной размерности определяются аналогично. Далее, если не оговорено противное, рассматриваются двумерные поверхности в $\mathbf{R}^3$.

1. Дайте геометрические или кинематические определения следующих подмножеств в $\mathbf{R}^3$ и доказите, что они являются (непараметризованными) поверхностями.

- (a) квадрат со стороной a на плоскости;
- (b) боковая поверхность прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h ;
- (c) боковая поверхность прямого кругового усеченного конуса;
- (d) сфера радиуса R ;
- (e) тор с радиусами R и r ;
- (f) лист Мебиуса;
- (g) поверхность вращения;
- (h) седлообразная поверхность $z = xy, x^2 + y^2 \leq 1$.

Параметры поверхностей нужны не для доказательства, а для дальнейших ссылок на эту задачу.

Объемлемая и внутренняя изометрии. Скалярная кривизна.

Напомним, что два подмножества пространства $\mathbf{R}^n$ называются *объемлемо изометричными*, если между ними существует *объемлемая изометрия* (движение), т.е. сохраняющее расстояния (в $\mathbf{R}^n$!) отображение $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, переводящее первое во второе.

Две (непараметризованные) поверхности называются *внутренне изометричными*, если между ними существует *внутренняя изометрия*, т.е. отображение одной в другую, сохраняющее длины всех кривых.

Большая часть дальнейшего материала мотивирована следующими двумя проблемами: определить, являются ли данные (непараметризованные) поверхности

- внутренне изометричными?
- объемлемо изометричными?

2. (а) Прямоугольник на плоскости внутренне изометричен некоторой части любого такого цилиндра, у которого диаметр больше стороны прямоугольника.

(б) Единичный квадрат на плоскости внутренне изометричен некоторой части тора, задаваемого в $\mathbf{R}^4$ уравнениями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$.

(с) Прямоугольник на плоскости не является объемлемо изометричным никакой части никакого цилиндра.

3. (а) Сфера и плоскость не являются внутренне изометричными.

(б) Никакой круг на плоскости не является внутренне изометричным никакой части сферы.

(с) Никакой круг на сфере одного радиуса не является внутренне изометричным никакой части сферы другого радиуса.

Расстоянием по поверхности Π между точкам $P, X \in \Pi$ называется инфимум $|P, X|$ длин кривых на этой поверхности, соединяющих P и X . Ясно, что *внутренняя изометрия сохраняет расстояния по поверхности*. Обратное (т.е. то, что отображение, сохраняющее расстояния по поверхности, сохраняет длины всех кривых на поверхности) будет доказано ниже с использованием римановой метрики.

Круг и окружность на поверхности определяются аналогично случаю плоскости (через расстояние *по поверхности*). Для поверхности Π и точки $P \in \Pi$ обозначим через $L_{\Pi, P}(R)$ длину окружности на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$.

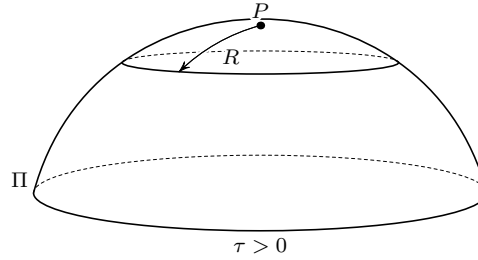


Рисунок 1: скалярная кривизна поверхности.

При решении задачи 3 естественно возникает следующее важное понятие. **Скалярной кривизной** поверхности Π во внутренней точке P называется число

$$\tau = \tau_{\Pi, P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L_{\Pi, P}(R)}{\pi R^3}.$$

Далее для скалярной и других кривизн P и Π пропускаются из обозначений, поскольку ясны из контекста.

4.* (а) $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L(R)}{R^2} = 0$.

(б) Предел, определяющий скалярную кривизну, существует.

(с) $L_{\Pi, P}(R) = 2\pi R - \frac{\pi \tau R^3}{6} + O(R^5)$ [Gr90, BBV06].

Указание: если не получается, то вернитесь к задаче после изучения темы 'Риманова метрика. Применение к изометриям'.

5. (abcd) Вычислите скалярную кривизну точек из задачи 1abcd темы 'поверхности'.

(e)* Скалярная кривизна в точке $(0, 0, 0)$ отрицательна для седлообразной поверхности $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. (a) Как изменяется скалярная кривизна при гомотетии пространства?

(b) Внутренняя изометрия сохраняет скалярную кривизну.

(c)* Существует ли отображение поверхностей, сохраняющее скалярную кривизну, но не являющееся внутренней изометрией?

(d)* **Теорема.** Элементарная непараметризованная двумерная поверхность внутренне изометрична некоторой части плоскости тогда и только тогда, когда ее скалярная (или секционная, или гауссова, см. далее) кривизна равна нулю в каждой точке [MF04, Ra04].

Для доказательства этой просто формулируемой теоремы (как и для получения формул для вычисления скалярной кривизны) нужно изучить почти весь настоящий курс!

Площадь поверхности.

Площадью называется отображение S из семейства всех двумерных поверхностей в луч $[0, +\infty)$, для которого выполнены следующие условия.

(аддитивность) Если Π , Π' и $\Pi \cup \Pi'$ поверхности, причем $\Pi \cap \Pi'$ является объединением не более чем счетного семейства кривых, то $S(\Pi \cup \Pi') = S(\Pi) + S(\Pi')$.

(монотонность) Если $f : \Pi \rightarrow f(\Pi)$ — не увеличивающее длины кривых отображение между поверхностями, то $S(f(\Pi)) \leq S(\Pi)$.

(нормировка) Площадь единичного квадрата на плоскости равна 1.

Теорема о площади. Такое отображение существует и единственно.

В следующих задачах ³ (кроме 4bd) можно пользоваться *существованием* из теоремы о площади (а также аналогичной теоремой и всеми другими результатами для площадей плоских фигур). В предположении существования можно найти площадь произвольной поверхности и этим доказать *единственность*. Далее, не используя предположение о *существовании*, можно проверить выполнение свойств площади для найденного отображения S и этим доказать существование.

1. Внутренняя изометрия сохраняет площади.

2. (a) Площадь сферического двуугольника с углом α и диаметрально противоположными вершинами равна 2α .

(b) **Теорема.** Площадь сферического треугольника с углами α , β и γ равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

(c) **Теорема.** Площадь сферического многоугольника с углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равна $\alpha_1 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi$.

3. (a) Площадь круга радиуса R на сфере равна $2\pi(1 - \cos R)$.

(b) Площадь поверхности, образованной вращением графика функции $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ вокруг оси Ox , равна $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

4. (a)* **Теорема.** Площадь элементарной непараметризованной поверхности $r(D)$ равна $S(r(D)) = \int \int_D |r_u \times r_v| du dv$ [Ra03].

(b) Докажите без использования теоремы о площади, что предыдущее выражение не зависит от выбора параметризации r .

(c) Докажите *единственность* в теореме о площади (предполагая существование).

³Решения задач из этой темы особенно полезно проверить с преподавателем.

(d)* Докажите *существование* в теореме о площади (не предполагая единственности!). Для проверки монотонности полезно понятие римановой метрики, определенное ниже, см. [Gr94].

5. Обозначим через $S_{\Pi,P}(R)$ площадь круга на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$.

(a) $L_{\Pi,P}(R) = S'_{\Pi,P}(R)$.

(b) $\tau = 24 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\pi R^2 - S_{\Pi,P}(R)}{\pi R^4}$.

(c)* $S_{\Pi,P}(R) = \pi R^2 - \frac{\pi \tau}{24} R^4 + O(R^6)$ [Gr90].

Скалярная кривизна (обобщение).

Для трехмерной поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ и точки $P \in \Pi$ обозначим через $S_{\Pi,P}(R)$ площадь сферы на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$. **Скалярной кривизной** поверхности Π в точке P называется число

$$\tau = \tau_{\Pi,P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4\pi R^2 - S_{\Pi,P}(R)}{(4/3)\pi R^4}.$$

1. Вычислите скалярную кривизну точек следующих трехмерных поверхностей в $\mathbf{R}^4$:

(a) гиперплоскости $\mathbf{R}^3$; (b) цилиндра $S^2 \times \mathbf{R}$; (c) цилиндра $S^1 \times \mathbf{R}^2$;

(d) конуса $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$; (e) сферы S^3 ; (f)* тора $S^2 \times S^1$.

Аналогично площади двумерных поверхностей определяется **n -мерный объем** n -мерных поверхностей. Аналогично двумерному случаю доказывается теорема о существовании и единственности n -мерного объема, а также следующий результат:

n -мерный объем элементарной непараметризованной поверхности $r : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ равен $V(r(D)) = \int \dots \int_D |r_{u_1} \wedge \dots \wedge r_{u_n}| du_1 \dots du_n$. Здесь $|r_{u_1} \wedge \dots \wedge r_{u_n}|$ — n -мерный объем n -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $r_{u_1}, \dots, r_{u_n}$.

Пусть $n \geq 2$ и Π — n -мерная поверхность в пространстве $\mathbf{R}^m$. Обозначим через

• V_n n -мерный объем шара радиуса 1 в $\mathbf{R}^n$,

• S_n $(n-1)$ -мерный объем поверхности шара радиуса 1 в $\mathbf{R}^n$,

• $V_{\Pi,P}(R)$ n -мерный объем шара на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$,

• $S_{\Pi,P}(R)$ $(n-1)$ -мерный объем поверхности шара на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$.

Скалярной кривизной поверхности Π в точке P называется число

$$\tau = \tau_{\Pi,P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{S_n R^{n-1} - S_{\Pi,P}(R)}{V_n R^{n+1}}.$$

2. (a) Такой предел существует.

(b) $S_{\Pi,P}(R) = V'_{\Pi,P}(R)$.

(c) $S_n = nV_n$.

(d) $\tau = 6(n+2) \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_n R^n - V_{\Pi,P}(R)}{V_n R^{n+2}}$.

(e)* $V_P(R) = V_n R^n - \frac{\tau}{6(n+2)} V_n R^{n+2} + O(R^{n+4})$ [Gr90].

3. **Теорема.** Внутренняя изометрия сохраняет скалярную кривизну.

(Докажите с использованием n -мерного аналога теоремы о площади.)

Главные кривизны.

1. Пусть задана система точек $A_1, \dots, A_s$ с массами $m_1, \dots, m_s$. Моментом инерции этой системы относительно прямой l называется число $I(l) = m_1|A_1l|^2 + \dots + m_s|A_sl|^2$, где $|A_i l|$ — расстояние от точки A_i до прямой l .

(а) Пусть I_+ и I_- — наибольшее и наименьшее значения моментов инерции относительно прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку O (возможно, $I_+ = I_-$). Возьмем одну из прямых l_+ , для которой $I(l_+) = I_+$. Тогда $I(l) = I_+ \cos^2 \varphi + I_- \sin^2 \varphi$, где $\varphi = \angle(l, l_+)$.

(б)* В пространстве существуют три такие прямые l_1, l_2, l_3 , проходящие через O , что для любой прямой l , проходящей через O , выполнено $I(l) = I(l_1) \cos^2(\angle l, l_1) + I(l_2) \cos^2(\angle l, l_2) + I(l_3) \cos^2(\angle l, l_3)$.

Коориентацией поверхности Π называется поле единичных нормальных (т.е. перпендикулярных) к поверхности векторов $n(P)$, непрерывно зависящих от точки $P \in \Pi$.

Кривизной (непараметризованной) кривой на коориентированной поверхности называется проекция ускорения на нормаль при движении по этой кривой с единичной скоростью.

(Кривизна в указанном смысле совпадает по модулю, но не обязательно по знаку, с кривизной соответствующей непараметризованной кривой.)

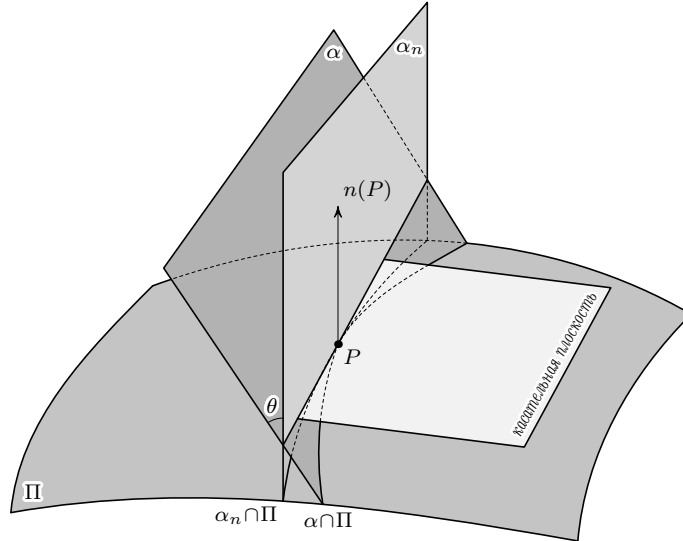


Рисунок 2: нормальное и 'косое' сечения поверхности.

Простейшие инварианты объемлемой изометрии появились еще в XVIII веке при решении следующей проблемы (рис. 2). Выберем коориентированную поверхность Π и точку P на ней. Как зависит от плоскости α , проходящей через точку P , кривизна в точке P (непараметризованной) кривой $\alpha \cap \Pi$?

Главными кривизнами λ_+ и λ_- коориентированной поверхности Π в точке $P \in \Pi$ называются наибольшее и наименьшее значения кривизн в точке P (непараметризованных) кривых пересечения поверхности с плоскостями, проведенными через нормаль в точке P .

Главным направлением коориентированной поверхности Π в точке $P \in \Pi$, отвечающим данной главной кривизне $\lambda_{\pm}$, называется направление той прямой (в касательной плоскости к Π в точке P), для которой кривизна пересечения поверхности с плоскостью, проходящую через эту прямую и нормаль, равна $\lambda_{\pm}$.

2. Задав коориентацию, найдите главные кривизны и главные направления в точках поверхностей из задачи 1abcdef из темы 'Поверхности'.

3. Как изменяются главные кривизны при

- (a) изменении ориентации на противоположную?
- (b) гомотетии пространства?

4. (a) Объемлемая изометрия сохраняет главные кривизны.

(b) Внутренняя изометрия может не сохранять главные кривизны.

5. **Теорема.** (a) Если в точке P поверхности Π главные кривизны одного знака, то для некоторого $\varepsilon > 0$ пересечение Π и шара $B(P, \varepsilon)$ в $\mathbf{R}^3$ с центром в P и радиуса ε лежит по одну сторону от касательной плоскости к Π в точке P .

(b) Если в точке P поверхности Π главные кривизны разного знака, то ни для какого $\varepsilon > 0$ пересечение $\Pi \cap B(P, \varepsilon)$ не лежит по одну сторону от касательной плоскости к Π в точке P .

6. (a) Найдите кривизну $k(\varphi)$ в начале координат кривой пересечения поверхности $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ с плоскостью, проведенной через ось Oz под углом φ к оси Ox .

(b) Для поверхности $z = f(x, y)$ предположим, что она касается плоскости $z = 0$, т.е. что $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Обозначим через $h = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ гессиан. Тогда главные кривизны являются корнями уравнения

$$(\lambda - f_{xx})(\lambda - f_{yy}) = f_{xy}^2, \quad \text{т.е.} \quad \det(h - \lambda E) = 0,$$

а главные направления соответствуют собственными векторами оператора $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, матрица которого в стандартном базисе является гессианом (инвариантное определение и геометрический смысл этого оператора приведены в пункте 'Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма)').

(c) **Формула Эйлера.** Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ — коориентированная поверхность и $P \in \Pi$. Пусть $k(\varphi)$ — кривизна в точке P кривой пересечения поверхности с плоскостью, проведенной через нормаль в точке P под углом φ к тому лучу, для которого эта кривизна максимальна (т.е. к главному направлению, отвечающему λ_+). Тогда $k(\varphi) = \lambda_+ \cos^2 \varphi + \lambda_- \sin^2 \varphi$.

(d) Если главные кривизны различны, то главные направления ортогональны.

(e)* Как вычислять главные кривизны для поверхностей, заданных в параметрическом виде?

7. (a) Как отличаются (для поверхностей, рассмотренных в задаче 2) кривизны кривых пересечения поверхности с двумя плоскостями (α и α_n на рис. 2), содержащими точку P и пересекающимися касательную плоскость к поверхности по одной и той же прямой, одна из которых проходит через нормаль, а другая под углом θ к нормали?

Указание: если не получается, то см. далее.

(b) Проекция на нормаль в точке $P = \gamma(0)$ ускорения параметризованной кривой γ на поверхности Π зависит только от скорости $\gamma'(0)$ этой кривой в точке P .

(c) **Теорема Менье.** Обозначим через k и k_n кривизны кривых пересечения поверхности с двумя плоскостями (α и α_n на рисунке), содержащими точку P и пересекающимися касательную плоскость к поверхности по одной и той же прямой, одна из которых проходит через нормаль, а другая под углом θ к нормали. Тогда $k \cos \theta = k_n$.

(d) Определим отображение $d(\varepsilon) : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ формулой $d(\varepsilon)(P) = P + \varepsilon n$. Тогда проекция из (b) равна $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[d(\varepsilon)'_P(a)]^2 - a^2}{2\varepsilon}$, где $a = \gamma'(0)$.

(e)* $\tau = 2\lambda_+ \lambda_-$.

Главные кривизны многомерных коориентированных поверхностей определяются более сложно (см. пункт 'Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма)').

Указания.

1a, 6a. Утверждения вытекают из того, что момент инерции и кривизна есть функции вида $f(\varphi) = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi$.

1b. Эти прямые попарно ортогональны.

2f. Глобально главные кривизны не определены.

6. (b) Проверяется вычислениями. Невычислительное доказательство этого результата (а также формул для H и K далее) получается, если интерпретировать гессиан как матрицу *второго дифференциала* функции f , или *второй квадратичной формы* задаваемой ей поверхности.

(c) Достаточно доказать для поверхности $z = f(x, y)$, касающейся плоскости Oxy в начале координат O .

(d) Следует из 6c.

(e) Напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $r(u, v)$ и используйте 6b.

7. (b) Обозначим $n = n(\gamma(t))$. Тогда

$$n \cdot \gamma' = 0 \quad \Rightarrow \quad n' \cdot \gamma' + n \cdot \gamma'' = 0 \quad \Rightarrow \quad n \cdot \gamma'' = -\gamma' \cdot \partial n / \partial \gamma'.$$

(a,c) Следует из 7b.

Другое указание к 7b. Можно считать, что поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, а уравнение плоскости $z = x \operatorname{ctg} \theta$. На кривой пересечения рассмотрим параметр y . Дифференцируя, получаем $z_y = f_x x_y + f_y$ и $z_y = x_y \operatorname{ctg} \theta$. Поэтому в точке $(0, 0, 0)$ имеем $y_y = 1$, $z_y = 0$ и $x_y = 0$, т.е. скорость кривой пересечения единичная. Проекция ускорения кривой пересечения на ось Oz равна $z_{yy} = (f_{xy} + f_{xx}x_y)x_y + f_{xyy} + f_{yx}x_y + f_{yy}$. В точке $(0, 0, 0)$ имеем $z_{yy} = f_{yy}$, что не зависит от θ . Поэтому проекция на ось Oz ускорения кривой пересечения в начале координат не зависит от θ . А поскольку это ускорение лежит в проведенной плоскости, оно равно $k(\varphi, \theta) = k(\varphi, 0) / \cos \theta$.

Полная средняя кривизна.

ε -окрестностью фигуры M (на плоскости или в пространстве) называется множество M_ε точек, удаленных от некоторой точки фигуры M не более, чем на ε :

$$M_\varepsilon := \{x : |x - y| < \varepsilon \text{ для некоторой } y \in M\}.$$

1. Нарисуйте ε -окрестность в плоскости и найдите ее периметр и площадь для

(a) квадрата со стороной 1;

(b) выпуклого многоугольника площади S и периметра P .

2. Нарисуйте ε -окрестность в пространстве и найдите ее объем и площадь ее поверхности для

(a) куба с ребром 1;

(b) правильной треугольной призмы с длинами ребер 1;

(c) правильного тетраэдра с ребром 1;

(d) произвольного выпуклого многогранника (решите сами, какие нужно задавать данные; аккуратно докажите Ваше утверждение о старшем коэффициенте).

3. (а) Коробки имеют форму прямоугольного параллелепипеда. Можно ли в одной коробке пронести другую коробку с большей суммой измерений по длине, ширине и высоте?

(б) Если выпуклый многогранник M с длинами ребер l_i и двугранными углами α_i содержится в шаре радиуса R , то $\sum l_i(\pi - \alpha_i) \leq 8\pi R$.

Поверхность (граница) фигуры F обозначается ∂F .

Полной средней кривизной выпуклого многогранника M называется число

$$H(\partial M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\partial M_\varepsilon) - S(\partial M)}{\varepsilon}.$$

В задаче 2d Вы доказали, что $H(\partial M) = \sum l_i(\pi - \alpha_i)$.

Теперь рассмотрим коориентированную поверхность $\Pi \subset \mathbf{R}^3$. Обозначим через $\Pi_\varepsilon := \{P + \varepsilon n(P)\}_{P \in \Pi}$ поверхность, образованную концами векторов $\varepsilon n(P)$, отложенных от точек P поверхности Π (рис. 3).

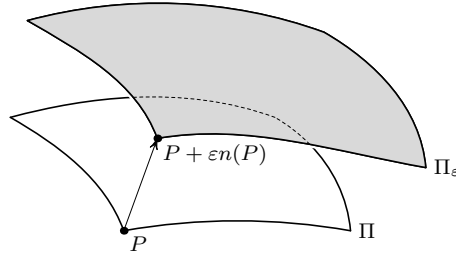


Рисунок 3: сдвиг поверхности вдоль семейства нормалей

Полной средней кривизной коориентированной поверхности Π называется число

$$H(\Pi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\Pi_\varepsilon) - S(\Pi)}{\varepsilon}.$$

Можно эвристически 'доказать', что средняя кривизна мыльной пленки (т. е. поверхности минимальной площади с данной границей) равна 0.

4. Задав коориентацию, найдите полную среднюю кривизну поверхностей из задачи 1abcde темы 'Поверхности'.

5. Как изменяется полная средняя кривизна при

(а) изменении коориентации на противоположную?

(б) гомотетии пространства?

6. (а) Полная средняя кривизна аддитивна, т.е. $H(\Pi_1 \sqcup \Pi_2) = H(\Pi_1) + H(\Pi_2)$ (если $\partial \Pi_1$ и $\partial \Pi_2$ — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

(б) Объемлемая изометрия сохраняет полную среднюю кривизну.

(с) Внутренняя изометрия может не сохранять полную среднюю кривизну.

7. Пусть $r(D)$ — элементарная непараметризованная поверхность с коориентацией $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$. Будем пропускать в формулах аргумент (u, v) функций r_u и r_v , а также вместо $n(r(u, v))$ писать n .

(а) $S(r(D)) = \int \int_D r_u \wedge r_v \wedge n \, dudv$.

(б) $r(D)_\varepsilon = r_\varepsilon(D)$, где $r_\varepsilon(u, v) := r(u, v) + \varepsilon n$.

(с) $H(r(D)) = \int \int_D (r_u \wedge n_v \wedge n + n_u \wedge r_v \wedge n) dudv$. В частности, предел, определяющий полную среднюю кривизну, действительно существует.

8.* Для выпуклого ограниченного множества $M \subset \mathbf{R}^3$ и его ε -окрестности M_ε

$$(a) \quad V(M_\varepsilon) = V(M) + S(\partial M)\varepsilon + \frac{1}{2}H(\partial M)\varepsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3.$$

$$(b) \quad S(\partial M_\varepsilon) = S(\partial M) + H(\partial M)\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2.$$

$$(c) \quad H(\partial M) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(M_\varepsilon) - V(M) - S(\partial M)\varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V(M_R) - 4\pi R^3/3}{R^2}.$$

Указание к 2d. Перенесем параллельно каждый сферический сектор (являющийся частью ε -окрестности) так, чтобы вершина перешла в начало координат. Докажите, что почти все лучи, выходящие из начала координат, пересекают ровно один из перенесенных сферических секторов.

Другое решение получается, если построить на сфере точки, соответствующие (нормальям к) граням многогранника и дуги, соответствующие (нормальям к) ребрам многогранника.

$$\text{Указание к 7a. } r_u \wedge r_v \wedge n = (r_u \times r_v) \cdot n.$$

Средняя кривизна в точке.

Приведем 'физическое' определение. Возьмем распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого ее куска равна полной средней кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *средней кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **средней кривизной** коориентированной поверхности Π в точке P называется число

$$H = H_{\Pi, P} := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{H(\Pi_P)}{S(\Pi_P)},$$

где Π_P — образы прямоугольников, содержащие точку P , при всевозможных параметризациях поверхности. Полученное число является *плотностью* полной средней кривизны относительно площади.

1. Задав коориентацию, найдите среднюю кривизну в точках поверхностей из задачи 1abcde из темы 'Поверхности'.

2. Задав коориентацию, найдите знак средней кривизны точек

(a) тора; (b) поверхности вращения функции f .

3. Как изменяется средняя кривизна в точке при гомотетии пространства?

4. (a) Напишите определение предела $\lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{H(\Pi_P)}{S(\Pi_P)}$ 'на языке ε - δ '.

(b) Напишите определения полной средней кривизны плоской кривой и средней кривизны плоской кривой в точке.

(c)* Последняя равна обычной кривизне.

5. (abc) **Теорема.**

$$H_P = \frac{r_u \wedge n_v \wedge n + n_u \wedge r_v \wedge n}{|r_u \times r_v|} = -f_{xx} - f_{yy} = \frac{(r_v^2 r_{uu} + r_u^2 r_{vv} - 2(r_u \cdot r_v) r_{uv}) \wedge r_u \wedge r_v}{|r_u \times r_v|^3},$$

где первая и третья формулы выполнены для коориентации $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$, а вторая формула выполнена в точке O для поверхности $z = f(x, y)$, касающейся плоскости Oxy в начале координат и той коориентации, для которой $n_O = (0, 0, 1)$.

При доказательстве первой формулы не забудьте доказать существование предела, определяющего среднюю кривизну в точке.

(d) Вычислите среднюю кривизну в каждой точке поверхности вращения, если нормали направлены к оси вращения.

6. Теорема. Минус половина средней кривизны равна полусумме главных кривизн и равна среднему значению кривизны сечения:

$$-\frac{H}{2} = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k(\varphi) d\varphi.$$

Указание к 5а. Примените теорему о среднем.

Указание к 5с. Используйте $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$. Или сначала напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $r(u, v)$.

Полная гауссова кривизна.

Коориентированная поверхность $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ называется *выпуклой*, если лучи, определенные (закрепленными) нормалью в разных точках, не пересекаются. (Это определение не согласуется с определением выпуклости множества, но это не должно привести к путанице.) Следующий материал интересен даже для выпуклых поверхностей.

Полной гауссовой кривизной выпуклой коориентированной поверхности Π называется число

$$K(\Pi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{S(\Pi_R)}{R^2}.$$

1. Задав коориентацию, найдите полную гауссову кривизну поверхностей из задачи 1abcde из темы 'Поверхности'.

(f) то же для произвольной замкнутой выпуклой (т.е. ограничивающей выпуклое тело) поверхности.

Полной гауссовой кривизной коориентированной поверхности Π называется число $K(\Pi)$, для которого

$$S(\Pi_\varepsilon) = S(\Pi) + H(\Pi)\varepsilon + K(\Pi)\varepsilon^2 \quad (*)$$

при достаточно малых ε (при которых поверхность Π_ε несамопересекающаяся).

2. (а) Это определение совпадает с предыдущим для выпуклых поверхностей.

(b) Найдите полную гауссову кривизну тора.

3. Как изменяется полная гауссова кривизна при

(а) изменении коориентации на противоположную?

(b) гомотетии пространства?

4. (а) Полная гауссова кривизна аддитивна, т.е. $K(\Pi_1 \cup \Pi_2) = K(\Pi_1) + K(\Pi_2)$ (если $\partial\Pi_1$ и $\partial\Pi_2$ — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

(b) Объемлемая изометрия сохраняет полную гауссову кривизну.

Далее (с использованием римановой метрики и теоремы Egregium Гаусса) будет доказано, что *внутренняя изометрия сохраняет полную гауссову кривизну*.

Если отложить нормали к коориентированной поверхности Π от начала координат, то их концы будут лежать на единичной сфере. Построенная поверхность $G(\Pi) \subset S^2 \subset \mathbf{R}^3$ называется *сферическим* или *гауссовым* образом коориентированной поверхности Π (рис. 4).

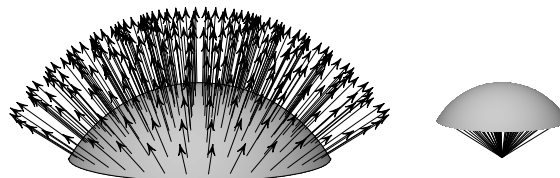


Рисунок 4: сферический образ поверхности

5. Площадь сферического образа выпуклой поверхности равна ее полной гауссовой кривизне.

Пусть нормали к различным точкам коориентированной поверхности не сонаправлены. Определим *площадь со знаком* сферического образа как его площадь со знаком плюс (или минус), если при обходе границы поверхности по часовой стрелке (относительно нормалей) граница сферического образа обходится по часовой стрелке (или против часовой стрелки).

6. Площадь сферического образа со знаком отрицательна для седлообразной поверхности $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Если коориентированную поверхность Π можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых нормали к различным точкам не сонаправлены, то площадью со знаком ее сферического образа называется сумма площадей со знаком этих частей.

7. (а) Это определение корректно, т.е. не зависит от разбиения поверхности.

(б) **Теорема.** Площадь со знаком сферического образа поверхности равна ее полной гауссовой кривизне.

Далее $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ — коориентированная параметризованная поверхность. Ее *площадью со знаком* называется число

$$S_n(r(D)) := \int \int_D r_u \wedge r_v \wedge n \, dudv.$$

8. $K(r(D)) = \int \int_D n_u \wedge n_v \wedge n \, dudv$ для коориентации $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$. В частности, определение гауссовой кривизны осмысленно, т.е. $S(\Pi_\varepsilon)$ действительно выражается формулой (*) с некоторыми (не зависящими от ε) $H(\Pi)$ и $K(\Pi)$.

Если отложить вектор $n(r(u, v))$ от начала координат, то его конец будет лежать на единичной сфере. Построенное отображение $n \circ r : D \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ называется *сферическим* или *гауссовым*.

9. (а) Вектор $n(r(u, v))$ перпендикулярен поверхности $n \circ r(D)$ в ее точке $n \circ r(u, v)$, т.е. поле нормалей $m(n \circ r(u, v)) := n(r(u, v))$ задает коориентацию поверхности $n \circ r(D)$.

(б) Площадь со знаком образа сферического отображения параметризованной поверхности равна полной гауссовой кривизне образа этой поверхности.

Гауссова кривизна в точке.

Вновь начнем с 'физического' определения. Возьмем распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого ее куска равна полной гауссовой кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *гауссовой кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **гауссовой кривизной** коориентированной непараметризованной поверхности Π в точке P называется число

$$K = K_{\Pi, P} := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{K(\Pi_P)}{S(\Pi_P)}$$

где Π_P — образы прямоугольников, содержащие точку P , при всевозможных параметризациях поверхности. Это *плотность* полной гауссовой кривизны относительно площади.

1. Найдите гауссову кривизну в точках поверхностей из задачи 1abcde из темы 'Поверхности'.

2. Найдите знак гауссовой кривизны точек (а) тора; (б) поверхности вращения.
3. (а) Напишите определения 'окружностного образа' плоской кривой, полной гауссовой кривизны плоской кривой и гауссовой кривизны плоской кривой в точке.
(б) Последняя равна обычной кривизне.
4. Как изменяется гауссова кривизна в точке при гомотетии пространства?
5. (abc) **Теорема.**

$$K_P = \frac{n_u \wedge n_v \wedge n}{|r_u \times r_v|} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{(r_{uu} \wedge r_u \wedge r_v)(r_{vv} \wedge r_u \wedge r_v) - (r_{uv} \wedge r_u \wedge r_v)^2}{|r_u \times r_v|^4},$$

где первая и третья формулы выполнены для коориентации $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$, а вторая формула выполнена в точке O для поверхности $z = f(x, y)$, касающейся плоскости Oxy в начале координат.

При доказательстве первой формулы не забудьте доказать существование предела, определяющего гауссову кривизну в точке.

- (d) Вычислите гауссову кривизну в каждой точке поверхности вращения.
6. (а) **Следствие.** Главные кривизны являются корнями уравнения $\lambda^2 + H\lambda + K = 0$.
(б) **Следствие.** Гауссова кривизна равна произведению главных кривизн: $K = \lambda_+ \lambda_-$.
(с) В теореме 5ab из темы 'главные кривизны' можно заменить условие одинаковости (различности) знака главных кривизн на $K > 0$ ($K < 0$).
(d) Если гауссова и средняя кривизны в каждой точке поверхности равны нулю, то эта поверхность является частью плоскости.
- 7.* **Теорема.** Для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^3$ имеем $\tau = 2K$ (где τ — скалярная кривизна) [Gr90, MF04, Ra04].

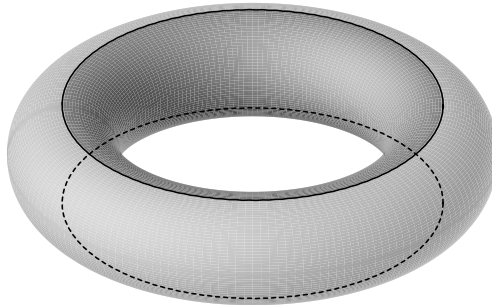


Рисунок 5: гауссова кривизна точек тора

Ответ к 2: см. рис. 5.

Указание к 5a. Примените теорему о среднем.

Указание к 5с. Используйте $n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v|$. Или сначала напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $r(u, v)$.

Геометрические.

Непараметризованная кривая $\Gamma \subset \Pi$ называется **геодезической** на поверхности Π , если она *локально кратчайшая*, т. е. если любая точка $x \in \Gamma$ имеет такую окрестность U в поверхности, что расстояние по поверхности между любыми точками $y_1, y_2 \in U \cap \Gamma$ равно длине отрезка кривой Γ от y_1 до y_2 .

1. В этой задаче рассматриваются геодезические на поверхностях многогранников. Их определение аналогично.

- (а) Нарисуйте на кубе геодезическую, соединяющую его противоположные вершины.
- (б) Нарисуйте геодезическую на прямоугольном параллелепипеде $a \times b \times c$, соединяющую середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани.
- (с) Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла не превосходит 2π .
- (д) Геодезическая на поверхности выпуклого многогранника не проходит через его вершины (т.е. может в них только начинаться или заканчиваться) и проходит через ребра по закону 'угол падения равен углу отражения'.

2. (а) Кратчайшая кривая является геодезической.
 (б) Геодезическая не обязательно является кратчайшей.
 (с)* Любые две точки можно соединить кратчайшей кривой (напомним, что рассматриваемая поверхность компактна).

3. (а) Внутренняя изометрия переводит геодезические в геодезические.
 (б)* **Теорема.** Образ параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \Pi$ с постоянной по модулю скоростью является геодезической на поверхности Π тогда и только тогда, когда вектор ускорения $\gamma''(t)$ перпендикулярен (плоскости, касательной к) поверхности в точке $\gamma(t)$ для любого t .

Указание к простому доказательству части 'тогда'. Пусть, напротив, $\gamma''(t)$ не перпендикулярно поверхности в некоторой точке t . Тогда проекция кривой γ на касательную плоскость в точке $\gamma(t)$ имеет ненулевую кривизну. Значит, эту проекцию можно 'спрямить'. Тогда и исходную кривую можно 'спрямить'.

Сложное доказательство части 'тогда' получается из уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала длины [Ra03].

(с)* При движении по геодезической правое и левое колеса узкого автомобиля проделают одинаковый путь с точностью до малых порядка квадрата ширины автомобиля. (Это следует из минимальности геодезических.)

(д)* Нарисуем на яйце (гладкой поверхности, лежащей по одну сторону от любой касательной плоскости и пересекающей эту плоскость ровно в одной точке; например, поверхности вращения графика выпуклой функции) произвольную кривую. Прокатим яйцо по плоскости (без вращения) вдоль этой кривой. Кривая на яйце является геодезической тогда и только тогда, когда соответствующая кривая на плоскости является прямой. (Это следует из предыдущего пункта.)

Параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \Pi$ называется *параметризованной геодезической* на поверхности Π , если вектор ускорения $\gamma''(t)$ перпендикулярен поверхности Π в точке $\gamma(t)$ для любого t .

Теорема 3б означает, что *непараметризованная кривая Γ на поверхности Π является геодезической тогда и только тогда, когда она имеет параметризацию, являющуюся параметризованной геодезической.*

Ясно, что параметризованная геодезическая имеет постоянную по модулю скорость. (От величины постоянного модуля скорости свойство параметризованной кривой быть параметризованной геодезической не зависит.) В дальнейшем имеются в виду *параметризованные* геодезические и это прилагательное опускается. На непараметризованных геодезических рассматриваются параметризации с постоянной по модулю скоростью.

- 4. (а) Прямая на поверхности — геодезическая.
- (б) Меридиан поверхности вращения — геодезическая.
- (с) Параллель поверхности вращения является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

(d)* Кривая, являющаяся связной компонентой множества неподвижных точек некоторой изометрии поверхности, является геодезической.

5. Найдите все геодезические на (а) плоскости; (б) цилиндре; (с) сфере (используйте 7f); (д) конусе (используйте инвариантность при изометрии).

6. *Теорема Клеро.* В точках геодезической γ на поверхности вращения величина $r \sin \angle(\gamma', m)$ одинакова. Здесь r — расстояние до оси вращения и m — меридиан.

7. Пусть $x_1, x_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и $\gamma = r(x_1, x_2)$ — параметризованная кривая на параметризованной поверхности $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$. Будем далее пропускать аргумент $(x_1(t), x_2(t))$ у функции r и ее частных производных и обозначать штрихом дифференцирование по t , а индексами у r (но не у Γ и g) — частное дифференцирование по соответствующей переменной (решателю будет полезно первое время кроме индексов писать еще штрихи).

(а) Кривая γ является геодезической тогда и только тогда, когда $\gamma'' \cdot r_1 = \gamma'' \cdot r_2 = 0$ для любого t .

(б) $\gamma' = r_1 x'_1 + r_2 x'_2$ — вектор скорости кривой γ в точке $r(x_1(t), x_2(t))$.

(с) $\gamma'' = x''_1 r_1 + x'_1 r'_1 + x''_2 r_2 + x'_2 r'_2$.

(д) $r'_1 = r_{11} x'_1 + r_{12} x'_2$.

(е) **Теорема.** Уравнение геодезической (на функции x_1 и x_2 через данную функцию r)

$$\begin{cases} -x''_1 = \Gamma_{11}^1 (x'_1)^2 + (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1) x'_1 x'_2 + \Gamma_{22}^1 (x'_2)^2 \\ -x''_2 = \Gamma_{11}^2 (x'_1)^2 + (\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2) x'_1 x'_2 + \Gamma_{22}^2 (x'_2)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad x''_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j = 0, \quad \text{где}$$

$$g_{ij} = r_i \cdot r_j \quad \text{и} \quad \Gamma_{ij}^k := \frac{g_{3-k,3-k} r_k \cdot r_{ij} - g_{k,3-k} r_{3-k} \cdot r_{ij}}{\det g} \quad .$$

(f) **Теорема.** Через каждую точку в каждом направлении на поверхности проходит ровно одна геодезическая.

(g) Вычислите символы Кристоффеля для сферической системы координат на сфере.

Указание к 1с. Проведите через вершину угла луч, лежащий внутри угла, и через точку на этом луче (отличную от вершины угла) плоскость, перпендикулярную лучу.

Указание к 6. Утверждение равносильно тому, что $e \wedge \gamma \wedge \gamma' = \text{const}$, где γ — геодезическая и e — единичный вектор, параллельный оси вращения. Последнее условие доказывается дифференцированием по правилу Лейбница, т.к. $e \wedge \gamma \wedge \gamma'' = 0$.

Параллельный перенос.

Все знают, что такое параллельный перенос на плоскости. Можно определить параллельный перенос и на искривленной поверхности. Более того, это определение необходимо для решения интересных задач из географии и физики.

Начнем с поверхности многогранника. (Заметим, что она не является поверхностью в смысле определения, принятого в данной книге.) Рассмотрим две соседние грани данного многогранника. Если повернуть плоскость одной из них вокруг их общего ребра, то она совместится с плоскостью другой грани [Та89, рис. 15]. Этот поворот можно рассматривать как перекачивание многогранника с одной грани на другую через его ребро. Если на первой грани нарисовать вектор, то после поворота он отпечатается на плоскости второй грани. Такой перенос вектора с одной грани на другую называется *параллельным переносом* вектора через ребро [Та89, рис. 16, 17].

1. (а) Если замкнутая ломаная на многограннике не содержит вершин и ограничивает область с вершинами $A_1, \dots, A_n$, суммы плоских углов в которых равны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то

после параллельного переноса вдоль этой ломаной вектор повернется на угол $-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$.

(b)* Этот угол поворота равен (с точностью до $2\pi n$) сумме величин телесных углов, *двойственных* к многогранным углам $A_1, \dots, A_n$.

Приведем неформальное описание параллельного переноса на поверхностях (уже в смысле этой книги). Нарисуем на поверхности кривую и проведем касательную к поверхности плоскость в некоторой точке кривой. Параллельный перенос касательной плоскости вдоль кривой на поверхности — это качение касательной плоскости вдоль кривой без проскальзывания (при котором плоскость остается касательной). Это движение касательной плоскости по неподвижной поверхности задается следующим условием: *мгновенная ось вращения касательной плоскости касается поверхности и перпендикулярна данной кривой*.

Формально, пусть дана поверхность $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ и параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \Pi$. Касательное к поверхности Π векторное поле $v(t)$ на кривой $\gamma[a, b]$ называется **параллельным вдоль данной кривой** (в смысле Леви-Чивита), если вектор $v'_t(t)$ перпендикулярен (плоскости, касательной к) поверхности в точке $\gamma(t)$ при любом t .

Вектор $v(\gamma(b))$ называется *вектором, полученным из вектора $v(\gamma(a))$ параллельным переносом вдоль данной кривой*.

2. (a) Какие касательные векторы к плоскости, лежащей в трехмерном пространстве, получаются друг из друга параллельным переносом?

(b) Поле векторов скорости параметризованной кривой на поверхности является параллельным вдоль этой кривой тогда и только тогда, когда эта кривая является параметризованной геодезической.

(c) Параллельность вдоль параметризованной кривой с *данным образом* не зависит от выбора этой кривой.

(d) Результат параллельного переноса вдоль кривой с *данными концами* может зависеть от выбора этой кривой.

Векторное поле на поверхности называется *параллельным вдоль непараметризованной кривой*, если оно параллельно вдоль любой ее параметризации. Это определение корректно ввиду задачи 2с.

3. (a) Непрерывное семейство векторов одинаковой длины на меридиане поверхности вращения, касающихся параллелей, параллельно вдоль меридиана.

(b) Дана поверхность вращения гладкой положительной функции f . На какой угол в $\mathbf{R}^3$ повернется вектор, касательный к меридиану, при параллельном переносе из точки $(a, f(a), 0)$ в точку $(b, f(b), 0)$ вдоль меридиана?

4. Если на данной поверхности семейства векторов u и v параллельны вдоль данной кривой, то

$$(a) |v(x)| = |v(y)|. \quad (b) u(x) \cdot v(x) = u(y) \cdot v(y). \quad (c) \angle(u(x), v(x)) = \angle(u(y), v(y)).$$

(d) Семейства $u + v$ и $3u$ параллельны вдоль той же кривой.

5. (a) **Теорема.** Параллельный перенос на данной поверхности вдоль данной кривой определяет ортогональное отображение касательных пространств.

(b) Семейство векторов является параллельным вдоль геодезической тогда и только тогда, когда модуль вектора семейства и угол между вектором семейства и вектором скорости геодезической постоянны вдоль геодезической.

6. Пусть $v(t) = a_1(t)r_1(x_1(t), x_2(t)) + a_2(t)r_2(x_1(t), x_2(t))$ — касательный к поверхности вектор в точке $r(x_1(t), x_2(t))$. Будем далее обозначать штрихом производную по t и

пропускать аргументы функций.

(а) $v' = a'_1 r_1 + a_1 r'_1 + a'_2 r_2 + a_2 r'_2$.

(б) Семейство v параллельно вдоль кривой $\gamma = r(x_1, x_2)$ тогда и только тогда, когда $v' \cdot r_1 = v' \cdot r_2 = 0$.

(с) **Теорема.** Уравнение параллельного переноса (на функции a_1 и a_2 через данные функции r, x_1, x_2)

$$\begin{cases} -a'_1 = (\Gamma_{11}^1 x'_1 + \Gamma_{21}^1 x'_2) a_1 + (\Gamma_{12}^1 x'_1 + \Gamma_{22}^1 x'_2) a_2 \\ -a'_2 = (\Gamma_{11}^2 x'_1 + \Gamma_{21}^2 x'_2) a_1 + (\Gamma_{12}^2 x'_1 + \Gamma_{22}^2 x'_2) a_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad a'_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x'_i a_j = 0.$$

(д) Любой вектор можно параллельно перенести вдоль любой кривой.

Далее (с использованием римановой метрики) будет доказано, что *при внутренней изометрии поверхностей семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль образа этой кривой.*

Секционная кривизна.

Объяснение феномена маятника Фуко с использованием параллельного переноса приводится в [Та89].

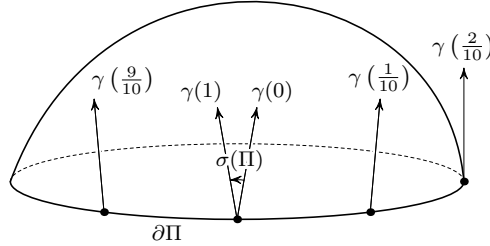


Рисунок 6: параллельный перенос вектора по замкнутому контуру

1. На какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль

- (а) параллели на цилиндре?
- (б) контура треугольника с углами α, β, γ на сфере?
- (с) параллели $z = 1$ на конусе $z^2 = x^2 + y^2$?
- (д) параллели $\theta = \theta_0$ на сфере?
- (е) данной параллели данной поверхности вращения?

Указание к 1с и 3б. Используйте (доказанную ниже) инвариантность параллельного переноса при внутренней изометрии.

2. Пусть N, N' — поверхности, касающиеся вдоль кривой γ . Докажите, что результат параллельного переноса вдоль кривой γ одинаков для N и N' .

Полной секционной кривизной $\sigma(\Pi)$ двумерной поверхности Π с гладкой границей $\partial\Pi$ называется угол между касательным вектором в точке границы $\partial\Pi$ и вектором, полученным из него параллельным переносом вдоль $\partial\Pi$.

3. (а) Объемлемая изометрия сохраняет полную секционную кривизну.

(б) **Теорема.** Внутренняя изометрия сохраняет полную секционную кривизну.

(с) Полная секционная кривизна аддитивна, т.е. $\sigma(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \sigma(\Pi_1) + \sigma(\Pi_2)$ (если $\partial\Pi_1$ и $\partial\Pi_2$ — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

4. Определение сферического отображения $G : \Pi \rightarrow S^2$ дано в пункте 'гауссова кривизна'. По сферическому отображению можно построить семейство отображений $dG_P : T_P \rightarrow T_{G(P)}$ касательной плоскости T_P (в точке P к Π) в касательную плоскость $T_{G(P)}$ (в точке

$G(P)$ к S^2): для $P \in \Pi$ образом (закрепленного) касательного вектора PX назовем вектор $G(P)dG_P(X)$, равный вектору PX как свободный вектор. Построенное отображение dG_P называется *сферическим отображением касательных пространств*.

(а) Это отображение корректно определено, т.е. $G(P)dG_P(X)$ действительно касается гауссова образа $G(\Pi)$.

(б) Это отображение совпадает с дифференциалом сферического отображения.

(с) При сферическом отображении касательных пространств семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль ее образа (при сферическом отображении).

(д) Угол поворота вектора при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой равен углу поворота вектора при параллельном переносе вдоль сферического образа этой кривой: $\sigma(\Pi) = \sigma(G(\Pi))$.

(е) **Теорема Egregium Гаусса.** Угол поворота касательного к двумерной поверхности в $\mathbf{R}^3$ вектора при параллельном переносе вдоль границы поверхности равен площади со знаком сферического образа этой поверхности: $\sigma(\Pi) = K(\Pi)$. (См. теорему 7 в пункте 'Полная гауссова кривизна'.)

Возьмем распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого ее куска равна полной секционной кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *секционной кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **секционной кривизной** поверхности Π в точке P называется число

$$\sigma(P) := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{\sigma(\Pi_P)}{S(\Pi_P)},$$

где Π_P — образы прямоугольников, содержащие точку P , при всевозможных параметризациях поверхности. Это *плотность* полной секционной кривизны относительно площади.

5. Как изменяется секционная кривизна в точке при гомотетии пространства?

Итак, для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^3$ скалярная, секционная и гауссова кривизны совпадают (с точностью до множителя 2). Заметим, что здесь скалярная и секционная кривизны определены для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^m$ при $m > 3$, а гауссова — нет.

6.* $\tau = 2\sigma$ для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^m$.

Указание к 1de. Используйте 1с и 2.

Указание к 4d. Ввиду предыдущего пункта достаточно доказать эту теорему для сферы. Это делается при помощи аппроксимации сферической области сферическими многоугольниками.

Другое указание к задаче 4d. Пусть v_P — семейство единичных векторов на $\partial\Pi$, параллельное вдоль $\partial\Pi$, и a_P и b_P — произвольная ортонормированная пара векторных полей на Π . Имеем (опуская аргумент P)

$$-\sin \angle(v, a) d\angle(v, a) = d(\cos \angle(v, a)) = d(v \cdot a) = v \cdot da + dv \cdot a = v \cdot da = \sin \angle(v, a) b \cdot da.$$

Тогда искомый угол равен

$$\int_{\partial\Pi} d\angle(v, a) = - \int_{\partial\Pi} b \cdot da = - \int_{\partial D} b \cdot a_u du + b \cdot a_v dv = \int \int_D \left(\frac{\partial(b \cdot a_v)}{\partial u} - \frac{\partial(b \cdot a_u)}{\partial v} \right) dudv =$$

$$= \int \int_D (b_u \cdot a_v - b_v \cdot a_u) dudv = \int \int_D n_u \wedge n_v \wedge n dudv = S(G(r(D))).$$

Здесь предпоследнее равенство справедливо, поскольку

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_1 & \omega'_2 \\ -\omega'_1 & 0 & \omega'_3 \\ -\omega'_2 & -\omega'_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix},$$

откуда $b_u \cdot a_v - b_v \cdot a_u = \omega_2 \omega'_3 - \omega'_2 \omega_3 = n_u \wedge n_v \wedge n$.

Указание к задаче 6. См. указание к задаче 5е темы 'билинейная форма кривизны Риччи'.

ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Длины кривых на поверхностях.

Обозначим $S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Расстоянием по сфере между точками сферы называется длина наименьшей дуги большого круга, соединяющей эти точки. Круг и окружность на сфере определяются аналогично случаю плоскости (через расстояние по сфере).

1. (а) Длина окружности радиуса R на сфере равна $2\pi \sin R$.

(б) Найдите формулу для длины параметризованной сферической кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2$ в сферических координатах φ, θ .

(с) То же в декартовых координатах x, y .

(d) То же в *стереографических координатах*: паре чисел (p, q) соответствует точка сферы, которая переходит в точку $(p, q, 0)$ при центральной проекции из точки $(0, 0, 1)$.

(е)* То же в *меркаторовских координатах*, которые определяются так. На карте вводятся прямоугольные координаты (u, v) такие, что любая прямая на карте соответствует локсодромии (т.е. линии постоянного азимута — фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара.

Указание: сначала выразите сферические координаты (φ, θ) через меркаторовские координаты (u, v) .

2. Выразите длину кривой $[a, b] \xrightarrow{(u,v)} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{r} \mathbf{R}^3$ через функции u и v (в формуле можно использовать не только алгебраические выражения, но производные и интегралы) для

(а) $r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ — цилиндр с цилиндрической системой координат.

(б) $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ — конус с конической системой координат.

(с) $r(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$ — тор с торической системой координат.

(d) $r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, h(v))$ — поверхность вращения.

3. Теорема. Длина кривой $[a, b] \xrightarrow{(u,v)} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{r} \mathbf{R}^3$ равна

$$\int_a^b \sqrt{r_u^2(u'_t)^2 + 2r_u \cdot r_v u'_t v'_t + r_v^2(v'_t)^2} dt.$$

В этой формуле пропущены аргументы t функций u, v, u'_t, v'_t ; $r_u = r_u(u(t), v(t))$ и аналогично для r_v .

Углом между пересекающимися параметризованными кривыми в их общей точке A называется угол между их касательными в этой точке.

4. (а) Угол между параметризованными кривыми не зависит от их параметризации.

(б) Найдите угол между r -образами кривых $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ для $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2)$ (r -образом области D является часть параболоида $z = x^2 + y^2$).

Риманова метрика. Применение к изометриям.

1. Дайте определение производной отображения $r : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Для поверхности Π и точки $P \in \Pi$ обозначим через $T_P = T_{P,\Pi}$ касательную плоскость к Π в точке P .

Римановой метрикой⁴ (или первой квадратичной формой) на Π называется семейство билинейных форм

$$g_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R} \quad (P \in \Pi), \quad \text{определенных формулой} \quad g_P(a, b) = a \cdot b.$$

⁴Более точно, римановой метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^3$.

На непараметризованной поверхности, не являющейся элементарной (например, на сфере или листе Мебиуса) риманову метрику нельзя задать семейством матриц 2×2 .

Риманова метрика на непараметризованной поверхности задается сопоставлением каждой параметризации $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ некоторого куска этой поверхности семейства матриц g_{ij} (в стандартном базисе $(0, 1), (1, 0)$) билинейных форм, являющихся обратными r -образами римановой метрики на $r(D)$, т.е. билинейных форм

$$r'(X)^*g : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad (X \in D), \quad \text{определенных формулой} \quad r'(X)^*g(a, b) = r'(X)a \cdot r'(X)b.$$

Эти матрицы должны быть связаны на пересечениях кусков, как в 2f ниже. Далее через $\det g$ обозначается определитель матрицы g_{ij} (но не билинейной формы g или $r'(X)^*g$).

2. (а) Теорема. Матрица g_{ij} в точке (u, v) в стандартном базисе есть матрица скалярных произведений (т.е. матрица Грама) базиса (r_u, r_v) .

(б) **Следствие.** Длина образа кривой $\gamma = (u_1, u_2) : [a, b] \rightarrow D$ на параметризованной поверхности $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ равна

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u'_i u'_j} dt = \int_a^b \sqrt{r'^* g_{r(\gamma)}(\gamma', \gamma')} dt = \int_a^b \sqrt{g_{r(\gamma)}(r'^* \gamma', r'^* \gamma')} dt.$$

В этой формуле пропущены аргументы t функций γ, u_1, u_2 и аргумент $(u_1(t), u_2(t))$ функций r'^*, g_{ij} .

(с) Вычислите матрицу g_{ij} в точке в стандартном базисе для параметризованной поверхности $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ (через функцию f и ее частные производные).

(d) То же для параметризованной поверхности $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (через функции x, y, z и их частные производные).

(e) $\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ в любой точке.

(f) **Теорема.** Для разных параметризаций $r, \tilde{r}$ одной непараметризованной поверхности и соответствующих матриц $g, \tilde{g}$ выполнено $\tilde{g} = J^T g J$, где $J = (r^{-1} \circ \tilde{r})'$.

3. (а) Теорема. Отображение поверхностей является внутренней изометрией (т.е. сохраняет длины кривых) тогда и только тогда, когда оно переводит риманову метрику на первой в риманову метрику на второй.

(б) Для поверхности Π и точки $P \in \Pi$ определим функцию

$$f = f_{\Pi, P} : \Pi \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{формулой} \quad f(X) = |P, X|^2,$$

где $|P, X|$ — расстояние по поверхности. Тогда $f'(P) = 0$ и второй дифференциал функции f совпадает с римановой метрикой.

(с) **Теорема.** Отображение поверхностей является внутренней изометрией тогда и только тогда, когда оно сохраняет расстояния.

4. (а) Пусть $\gamma, \beta : [-1, 1] \rightarrow D$ — параметризованные кривые, причем $\gamma(0) = \beta(0) = X$. Обозначим $(a_1, a_2) := \gamma'(0)$ и $(b_1, b_2) := \beta'(0)$. Тогда косинус угла между кривыми $r \circ \gamma$ и $r \circ \beta$ (на параметризованной поверхности $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$) в точке $r(X)$ равен

$$\frac{\sum_{i,j} g_{ij} a_i b_j}{\sqrt{(\sum_{i,j} g_{ij} a_i a_j)(\sum_{i,j} g_{ij} b_i b_j)}} = \frac{r'^* g(\gamma', \beta')}{\sqrt{r'^* g(\gamma', \gamma') r'^* g(\beta', \beta')}} = \frac{g_r(r' \gamma', r' \beta')}{\sqrt{g_r(r' \gamma', r' \gamma') g_r(r' \beta', r' \beta')}}.$$

Здесь γ' и β' берутся в точке 0, а r, r', g_{ij} в точке X .

(b) Внутренняя изометрия сохраняет углы между кривыми.

5. (a) $|r_u \times r_v|^2 = \det g$.

(b) Площадь поверхности $r(D)$ равна $\int \int_D \sqrt{\det(r'^*g)_{(u,v)}} du dv$, где $(r'^*g)_{(u,v)}$ — матрица формы $(r'^*g)_{(u,v)}$ в базисе $(0, 1), (1, 0)$.

6. (a) Выразите $r_k \cdot r_{ij}$ через g_{ij} .

(b) Выразите символы Кристоффеля через риманову метрику.

(c) **Теорема.** При внутренней изометрии поверхностей параметризованные геодезические переходят в параметризованные геодезические. (Докажите без использования задачи 3b из пункта 'геодезические'.)

(d) **Теорема.** При внутренней изометрии поверхностей семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль ее образа.

(e) **Следствие.** Внутренняя изометрия сохраняет гауссову кривизну.

Указание к 3a. Сначала докажите для элементарных непараметризованных поверхностей. Для доказательства в нетривиальную сторону продифференцируйте интеграл, выражающий длину кривой, по верхнему пределу, и используйте тождество поляризации.

Ответ к 6a. Знак скалярного произведения опускается.

$$2r_i r_{ii} = (g_{ii})'_i, \quad 2r_i r_{ij} = (g_{ii})'_j, \quad 2r_i r_{jj} = 2(g_{ij})'_j - (g_{jj})'_i, \quad \text{где } i \neq j.$$

Другой способ: $g_{ij} = r_i r_j$, значит $2r_k r_{ij} = (g_{ki})'_j + (g_{kj})'_i - (g_{ij})'_k$.

Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма).

Оператором Вейнгартена (или оператором формы) коориентированной поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ называется семейство операторов

$$\tilde{q}_P : T_P \rightarrow T_P \quad (P \in \Pi), \quad \text{определенных формулой} \quad \tilde{q}_P(a) := -\partial n / \partial a = -(n_{\gamma_a(t)})'_t|_{t=0}.$$

Здесь $\gamma_a : [-1, 1] \rightarrow \Pi$ — такая кривая, что $\gamma_a(0) = P$ и $\gamma'_a(0) = a$. (Эта *дериационная формула Вейнгартена* записывается также в виде $n_i = -q_i^1 r_1 - q_i^2 r_2$.)

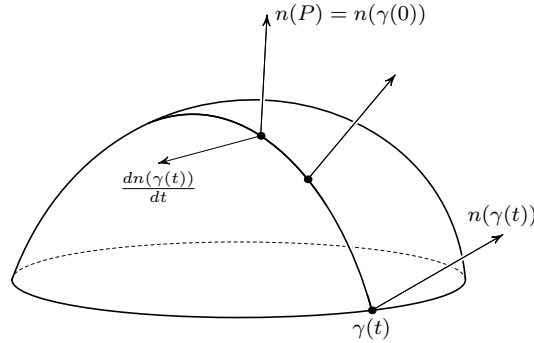


Рисунок 7: оператор Вейнгартена

1. (a) Приведенное определение корректно, т.е. $\partial n / \partial a$ лежит в T_P и не зависит от выбора кривой γ_a .

(b) Найдите оператор Вейнгартена сферы и цилиндра.

(c) Найдите матрицу оператора Вейнгартена в базисе r_u, r_v .

Второй квадратичной формой коориентированной непараметризованной поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ называется семейство билинейных форм

$$q_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R} \quad (P \in \Pi), \quad \text{определенных формулой} \quad q_P(a, b) := \tilde{q}_P(a) \cdot b = -b \cdot \partial n / \partial a.$$

(Формально, это семейство лучше было бы называть *второй билинейной формой*).

2. (а) Вторая квадратичная форма единичной сферы равна ее римановой метрике.

(b) Найдите вторую квадратичную форму цилиндра.

(c) **Теорема.** Матрица второй квадратичной формы поверхности $z = f(x, y)$, касающейся плоскости Oxy в начале координат $O = P$, в стандартном базисе является гессианом функции f .

(d) Найдите матрицу второй квадратичной формы поверхности $r(D)$ в базисе r_u, r_v .

3. Рассмотрим коориентированную поверхность $\Pi \subset \mathbf{R}^3$.

(а) Проекция на нормаль $n(P)$ в точке $P = \gamma(0)$ ускорения $\gamma''(0)$ параметризованной кривой γ на поверхности равна второй квадратичной форме от вектора скорости этой кривой в точке P : $n(P) \cdot \gamma''(0) = q_P(\gamma'(0), \gamma'(0))$.

(b) Определим отображение $d(\varepsilon) : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ формулой $d(\varepsilon)(P) = P + \varepsilon n(P)$. Тогда

$$2q_P(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\varepsilon)'_P(a) \cdot d(\varepsilon)'_P(b) - a \cdot b}{\varepsilon}.$$

Вторая квадратичная форма на коориентированной поверхности задается сопоставлением каждой параметризации $r : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ куска этой поверхности семейства матриц q_{ij} (в стандартном базисе $(0, 1), (1, 0)$) билинейных форм, являющихся обратными r -образами второй квадратичной формы на $r(D)$, т.е. билинейных форм

$$r'(X)^* q : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad (X \in D), \quad \text{определенных формулой} \quad r'(X)^* q(a, b) = q_{r(X)}(r'_a, r'_b).$$

(Матрицы должны быть согласованы на пересечениях кусков.)

4. Вычислите матрицу q_{ij} в стандартном базисе для

(а) $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$;

(b) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)$;

(c) $r(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$;

(d) $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, \sin u)$.

5. **Теорема.** Главные кривизны и направления в точке на поверхности являются собственными числами и направлениями оператора Вейнгартена (или пары первой и второй квадратичных форм g и q , т.е. корнями уравнения $\det(g - \lambda q) = 0$) в этой точке.

Главными кривизнами и главными направлениями многомерной поверхности в $\mathbf{R}^m$ называются собственные значения и собственные векторы ее оператора Вейнгартена (который определяется аналогично).

6. Сформулируйте и докажите аналоги известных Вам теорем о главных кривизнах и направлениях для трехмерных поверхностей в $\mathbf{R}^4$.

7.* Пусть q_{ij} — матрица второй квадратичной формы в стандартном базисе.

(а) *Деривационные формулы Гаусса.* $r_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + q_{ij} n$ [Ra03 (528)].

(b) **Теорема Бонне.** Две элементарные непараметризованные поверхности в $\mathbf{R}^3$ объемлемо изометричны тогда и только тогда, когда они имеют параметризации, индуцирующие одинаковые первые и вторые квадратичные формы (или одинаковые римановы метрики и операторы Вейнгартена) [Ra03, §81].

Указание. Примените теорему единственности для системы уравнений, составленных из деривационных формул Гаусса и Вейнгартена. Реализуются не все пары форм, а только удовлетворяющие *уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци* [Ra03, §82, §83].

Указание к За. Доказано в теме 'главные кривизны'.

Билинейная форма кривизны Риччи.

В этом пункте $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ — поверхность размерности n .

Для $P \in \Pi$ определим (геодезическое) экспоненциальное отображение

$$\exp = \exp_P : X \rightarrow \Pi \quad \text{формулой} \quad \exp(a) := \gamma_{P,a}(1),$$

где $\gamma_{P,a} : [-1, 1] \rightarrow \Pi$ — та геодезическая, для которой $\gamma_{P,a}(0) = P$ и $\gamma'_{P,a}(0) = a$. Здесь $X \subset T_P$ — множество тех векторов a , для которых определено $\gamma_{P,a}(1)$.

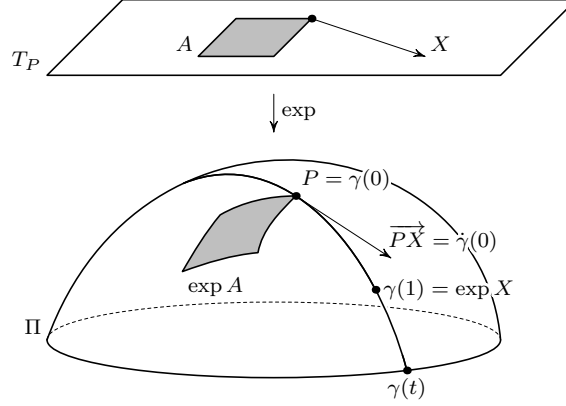


Рисунок 8: экспоненциальное отображение и квадратичная форма Риччи

1. (а) Для единичной сферы S^2 при экспоненциальном отображении $T_{(1,0,0)} \rightarrow S^2$ полярные координаты переходят в сферические: $\exp(1, \rho, \varphi) = (\cos \rho, \sin \rho \cos \varphi, \sin \rho \sin \varphi)$.

(б) Обобщите этот результат для поверхностей вращения.

2. (а) Прямая, проходящая через P , переходит при экспоненциальном отображении $\exp_P$ в геодезическую.

(б) Верно ли, что для любой поверхности и точки на ней образ любой прямой при экспоненциальном отображении является геодезической?

(с) Образом шара (в T_P) радиуса R с центром в P при экспоненциальном отображении $\exp_P$ является шар (на поверхности) радиуса R .

(д) Верно ли, что для любой поверхности и точки на ней образ любого шара при экспоненциальном отображении является шаром?

3. (а) Система координат экспоненциального отображения $\exp$ является *евклидовой* в точке P , т.е. $g_P(u, v) = u \cdot v$ и $g_X(u, v)'_X|_{X=P} = 0$ (или, в координатах, $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $g'_{ij}(P) = 0$).

(б) Внутренняя изометрия сохраняет экспоненциальное отображение: если $f : \Pi \rightarrow \Pi_1$ — внутренняя изометрия, то $\exp_{f(P)}(f'(P)u) = f(\exp_P u)$.

4. Напомним, что *скалярной кривизной* поверхности Π в точке P называется число $\tau = \tau_{\Pi, P} := 6(n+2) \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_n R^n - V_{\Pi, P}(R)}{V_n R^{n+2}}$, где $V_{\Pi, P}(R)$ — объем шара на Π радиуса R с центром в точке $P \in \Pi$.

(а) Докажите, что такой предел существует.

(б) Выразите скалярную кривизну через $g_{ij,kl}$ (где нижние индексы k и l означают дифференцирование по k и l).

Билинейная форма Риччи описывает искажение объема при экспоненциальном отображении. **Билинейной формой (тензором) Риччи** n -мерной поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ в точке $P \in \Pi$ называется такая симметричная билинейная форма $\rho = \rho_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$,

что

$$V(\exp(A)) = V(A) - \frac{1}{6} \int_A \rho(u, u) du + O(h^{n+3}) \quad \text{при } h = \text{diam}(A \cup P) \rightarrow 0$$

по измеримым множествам $A \subset T_P$.

Или, эквивалентно, что для любого единичного n -мерного куба $A \subset T_P$ с вершиной в P выполнено

$$V(\exp(hA)) = h^n - \frac{h^{n+2}}{6} \int_A \rho(u, u) du + O(h^{n+3}) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Аналогичная формула справедлива с заменой куба A на любое измеримое множество $A \subset T_P$ и h^n на $h^n V(A)$ (h^{n+2} и h^{n+3} не меняются).

5. (а) Такая симметричная билинейная форма существует и единственна.

(б) Выразите билинейную форму Риччи через $g_{ij,kl}$.

(с) Внутренняя изометрия сохраняет билинейную форму Риччи.

Пусть B^n — единичный шар в $\mathbf{R}^n$ и V_n — его n -мерный объем.

6. Для симметричной билинейной формы $\omega : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

(а) существует и единственен оператор $\tilde{\omega} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, для которого $\tilde{\omega}(u) \cdot v = \omega(u, v)$.

(б) докажите, что $(n+2) \int_{B^n} \omega(u, u) du = V_n \text{tr} \tilde{\omega} = V_n \sum_i \omega(e_i, e_i)$.

(с) докажите, что $\int_A \omega(u, u) du = \frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\omega} + \frac{1}{4} \sum_{i < j} \omega(e_i, e_j)$, если куб A натянут на ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$.

7. (а) **Теорема.** $\tau = \text{tr} \tilde{\rho}$.

(б) Докажите, что $2\rho_P(u, u) = \sum_i \tau_{\exp_P \langle u, e_i \rangle, P}$, где $|u| = 1$ и $e_1, \dots, e_{n-1}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к u в T_P и $\langle u, e_i \rangle$ — двумерная плоскость в T_P , натянутая на векторы u и e_i [BBV06].

(с) Если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в T_P , то $\tau_{\Pi, P} = \sum_{i < j} \tau_{\exp_P \langle e_i, e_j \rangle, P}$.

(д)* **Теорема.** Для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^m$ имеем

$$S(\exp(A)) = S(A) - \frac{\tau}{12} \int_A u^2 du + o(h^4) \quad \text{при } h = \text{diam}(A \cup P) \rightarrow 0$$

по измеримым множествам $A \subset T_P$. Иными словами, билинейная форма Риччи пропорциональна римановой метрике с коэффициентом $\tau/2$: $2\rho(u, v) = \tau u \cdot v$ [Gr90, MF04, Ra04].

Вычислительные формулы для билинейной формы Риччи появятся далее.

Указание к За. Обозначим $e := \exp_P : T_P \rightarrow \Pi$. Тогда $g_A(u, v) = e'_A u \cdot e'_A v$ для $A, u, v \in T_P$. (Или, в координатах, $g_{ij,A} = e'_A a_i \cdot e'_A a_j$, где T_P отождествлено с $\mathbf{R}^n$ при помощи некоторого ортонормированного базиса $a_1, \dots, a_n$.)

Так как $e'(P) = \text{id } T_P$, то $g_P(u, v) = u \cdot v$. (Или, в координатах, $g_{ij}(0) = a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$.)

Так как $\gamma_u(t) := e(P + ut)$ — геодезическая, то $e''_P(u, u) = \gamma''_u(0) \perp T_P$ для любого $u \in T_P$. Тогда $e''_P(u, v) \perp T_P$ для любых $u, v \in T_P$. Значит, для $u, v, w \in T_P$ имеем

$$g_{P+u}(u, v)'_w = g_{P+ut}(u, v)'_t|_{t=0} = (e'_{P+ut} u \cdot e'_{P+ut} v)'_t|_{t=0} = e''_P(w, u) \cdot e'_P v + e'_P u \cdot e''_P(w, v) = 0,$$

поскольку $(e'_{P+ut})'_t|_{t=0} u = e''_P(w, u)$.

Замечание. То же доказательство равенства $g'_{ij} = 0$ можно изложить и координатно. Кривая $\gamma(t) := e(at, bt, 0, \dots, 0)$ является геодезической для любых a и b . Тогда $\gamma''(t) \cdot e_k = (a^2 e_{11} + 2abe_{12} + b^2 e_{22}) \cdot e_k = 0$ для любого k . (Догадайтесь сами, что такое e_k .) Отсюда

$e_{11} \cdot e_k = e_{12} \cdot e_k = e_{22} \cdot e_k = 0$. Аналогично $e_{ij} \cdot e_k = 0$ для любых i, j, k . Тогда в этом базисе $(g_{ij})'_k = (e_i \cdot e_j)'_k = e_{ik} \cdot e_j + e_{jk} \cdot e_i = 0$.

Замечание. Равенство $g'_{ij}(P) = 0$ равносильно тому, что в ε -окрестности точки P с точностью до $o(\varepsilon)$ параллельный перенос коммутирует с экспоненциальным отображением, или ортогональности оператора e'_u .

Указание к 4. (а) Возьмем ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ в T_P . Поскольку геодезическая система координат евклидова (3а), то $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + o(|u|)$. Поэтому

$$\sqrt{\det g_{ij}(u)} = \sqrt{1 + o_1(|u|)} = 1 + o_2(|u|).$$

Значит,

$$V_{\Pi, P}(R) = \int_{B(R)} \sqrt{\det g_{ij}(u)} du = V_n R^n + o(R^{n+1}).$$

Ввиду бесконечной дифференцируемости функции $V_{\Pi, P}(R)$ получаем требуемое.

(б) Аналогично, начиная с равенства $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{k,l} g_{ij,kl} u_k u_l + o(|u|^2)$.

Указание к 5ab. Возьмем ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ в T_P .

(а) Аналогично задаче 4а $\sqrt{\det g_{ij}(u)} = 1 + o(|u|)$. Так как $V(\exp(A)) = \int_A \sqrt{\det g_{ij}(u)} du$, то ввиду бесконечной дифференцируемости функции $V(\exp(hA))$ получаем требуемое.

(б) Поскольку геодезическая система координат евклидова (3а), то $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + R_{ij}(u, u) + o(|u|^2)$, где R_{ij} — квадратичная форма по u (точнее, $R_{ij}(u, u) = \sum_{k,l} g_{ij,kl} u_k u_l$). Поэтому

$$\sqrt{\det g_{ij}(u)} = \sqrt{1 + \sum_i R_{ii}(u, u) + o_1(|u|^2)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_i R_{ii}(u, u) + o_2(|u|^2).$$

Так как $V(\exp(A)) = \int_A \sqrt{\det g_{ij}(u)} du$, то формула из определения билинейной формы Риччи будет верна, если положить $\rho(u, v) := \frac{1}{2} \sum_i R_{ii}(u, u)$.

Замечание к 5a. Используем указание к задаче 3а. Поскольку геодезическая система координат евклидова, то по формуле Тейлора $e'_u v_i = v_i + \frac{e''_u(u, u, v_i)}{2} + o(|u|^2)$,

$$2R_{ij}(u, u) = v_j \cdot e'''_u(u, u, v_i) + v_i \cdot e'''_u(u, u, v_j) \quad \text{и} \quad 2\rho(u, u) = \sum_i v_i \cdot e'''_u(u, u, v_i).$$

Объясним смысл выражения $e'''_u(u, u, v_i)$. Обозначим через $[L, L']$ векторное пространство линейных операторов из векторного пространства L в векторное пространство L' (все векторные пространства рассматриваются над $\mathbf{R}$). Тогда $e' : T_P \rightarrow [T_P, T_P]$ (e' не обязательно линейно). Значит, $e''_u : T_P \rightarrow [T_P, T_P]$ — линейный оператор, или отображение $e''_u : T_P \times T_P \rightarrow T_P$, линейное по второму аргументу. Тогда $e'' : T_P \rightarrow [T_P, [T_P, T_P]]$ (e'' не обязательно линейно). Поэтому $e'''_u : T_P \rightarrow [T_P, [T_P, T_P]]$ — линейный оператор, или отображение $e'''_u : (T_P)^3 \rightarrow T_P$, линейное по второму и третьему аргументам.

Указание к 7. (а) Следует из 6b.

(с) Следуют из 7ab.

(d) Из задач 1a и 7d следующей темы вытекает $\rho = \sigma g$, т.е. $\tilde{\rho} = \sigma \text{id}$. Отсюда и из $\tau = \text{tr } \tilde{\rho}$ (7a) получаем $\tau = 2\sigma$ и $2\rho = \tau g$. Было бы интересно найти прямое доказательство (ср. с 5a).

Тензор кривизны Римана.

В этом пункте $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ — поверхность размерности n .

Пусть $A \subset T_P$ — область с кусочно-гладкой границей ∂A , содержащей точку P . Обозначим через $\sigma(A) : T_P \rightarrow T_P$ линейный оператор, сопоставляющий вектору $x \in T_P$ вектор, полученный из x параллельным переносом вдоль ориентированной кривой $\exp_P(\partial A)$. Область A считается настолько малой, что $\exp_P(\partial A)$ определено.

Оператором секционной кривизны поверхности Π в точке $P \in \Pi$, отвечающим паре $u, v \in T_P$ линейно независимых векторов, называется такой линейный оператор $R(u, v) = R(u, v)_P : T_P \rightarrow T_P$, что для параллелограмма $A_{u,v}$, натянутого на u, v , имеем

$$\sigma(hA_{u,v}) = E + h^2 R(u, v) + o(h^2) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Здесь ориентированная кривая $\partial(hA_{u,v})$ выходит из P в направлении вектора u .

Если u и v линейно зависимы, то положим $R(u, v) = 0$.

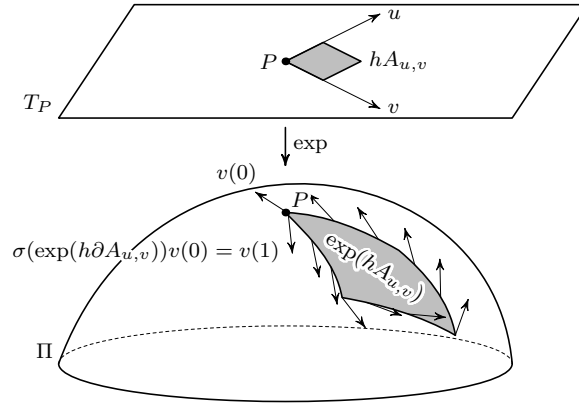


Рисунок 9: оператор секционной кривизны

Для ориентированной двумерной поверхности Π и точки $P \in \Pi$ обозначим через $R_P^\alpha : T_P \rightarrow T_P$ поворот на α относительно точки P .

В задачах 1 и 2 надо, в частности, доказать, что $R(u, v)$ существует.

1. (а) Для $n = 2$ имеем $\sigma(hA_{u,v}) = R_P^{S(\exp(hA_{u,v}))}$.

(б) Для $n = 2$ имеем $R(u, v)_P = (\sigma_P u \wedge v) R_P^{\pi/2}$.

(с) При параллельном переносе вдоль кривой, лежащей на двумерной подповерхности в нашей поверхности, параллельность к подповерхности касательного к поверхности вектора не обязательно сохраняется.

(д)* $u \cdot R(u, v)v = \sigma_{\exp\langle u, v \rangle} u \wedge v$. (Число $\sigma_{\exp\langle u, v \rangle}$ называется *секционной кривизной* поверхности Π в точке P , отвечающей паре линейно независимых векторов u, v .)

2. (а) Верно ли, что для $n = 3$ выполнено $R(u, v) = \sigma_{\exp\langle u, v \rangle} u \wedge v R_P^{\pi/2} \circ \text{pr}$, где $\langle u, v \rangle$ — плоскость в T_P , натянутая на векторы u, v , а $\text{pr} : T_P \rightarrow \langle u, v \rangle$ — ортогональная проекция?

(б) Для стандартной сферы $S^n = \{x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ в точке $(0, \dots, 0, 1)$ выполнено $R(u, v)w = u(v \cdot w) - v(u \cdot w)$, где u, v, w — касательные векторы к S^n .

3. (а)* Оператор $R(u, v)$ секционной кривизны существует и единственен.

(б) Он линейно зависит от u, v .

(с) **Теорема.** $\sigma(A) = E + S(A)R(u, v) + o(S(A))$ при $\text{diam } A \rightarrow 0$ по областям $A \subset T_P$ с кусочно гладкой границей, содержащей точку P .

(д) Внутренняя изометрия сохраняет оператор секционной кривизны.

4. Теорема о симметриях тензора Римана.

- (a) $R(u, v)$ кососимметричен, т.е. $[R(u, v)x] \cdot y = -[R(u, v)y] \cdot x$.
- (b) $R(u, v)$ кососимметричен по u, v : $R(u, v) = -R(v, u)$.
- (c) *Тождество Бьянки (алгебраическое)*. $R(u, v)x + R(v, x)u + R(x, u)v = 0$.
- (d) $[R(u, v)x] \cdot y = [R(x, y)u] \cdot v$.

5. Теорема. (a) Существует и единственно такое 4-линейное отображение $R = R_P : (T_P)^4 \rightarrow \mathbf{R}$, что $\exp'(u)x \cdot \exp'(u)y = x \cdot y + \frac{1}{3}R(u, x, u, y) + o(|u|^2)$ при любых постоянных $x, y \in T_P$. Здесь $\exp'(u) : T_P \rightarrow T_{\exp(u)}$.

(b) Существует и единственно такое трилинейное отображение $\tilde{R}_P : (T_P)^3 \rightarrow T_P$, что $\tilde{R}_P(u, x, v) \cdot y = R_P(u, x, v, y)$.

(c)* $R_P(u, x)v \cdot y = R_P(u, x, v, y)$.

(Это дает эквивалентное определение оператора секционной кривизны и, значит, тензора кривизны Римана, см. ниже. Именно так его определял Риман [Ca28, 9.1, стр. 204].)

(d) В системе координат экспоненциального отображения $R_{ijkl} = g_{ij,kl}$.

(e) Найдите компоненты R_{ijkl} для поверхности $r : D \rightarrow \Pi$ в базисе (r_u, r_v) .

6.* (a) [MF04, Ra04] **Теорема.** Следующие условия на элементарную n -мерную поверхность равносильны:

- (1) она изометрична некоторой части пространства $\mathbf{R}^n$;
- (2) параллельный перенос по замкнутому контуру переводит каждый вектор в себя;
- (3) все ее операторы секционной кривизны в любой точке нулевые (или один тензор кривизны Римана нулевой, см. ниже).

(b) Если на односвязной поверхности выполнено (3), то поверхность параллелизуема.

Тензором кривизны Римана в точке P (многомерной) поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ называется трилинейное отображение

$$R : (T_P)^3 \rightarrow T_P, \quad \text{определенное формулой} \quad R(u, v, x) := R(u, v)x.$$

7. (a) Вычислите компоненты R_{jkl}^i на двумерной сфере в сферических координатах.

(b) **Теорема.** Для двумерной поверхности в $\mathbf{R}^m$ тензор Римана выражается через риманову метрику и секционную кривизну: $R(u, v, x) = \sigma u \wedge v R_P^{\pi/2}(x)$.

(Или, в системе координат экспоненциального отображения, $R_{1212} = \sigma \det(g_{ij})$; остальные компоненты нулевые или равны $\pm R_{1212}$ ввиду симметрий тензора Римана.)

(c) **Теорема.** Для трехмерной поверхности в $\mathbf{R}^m$ тензор Римана выражается через риманову метрику и билинейную форму Риччи:

$$R(u, v)x = \rho(u, x)v - \rho(v, x)u + (u \cdot x)\tilde{\rho}(v) - (v \cdot x)\tilde{\rho}(u) + \frac{\tau}{2}[(v \cdot x)u - (u \cdot x)v].$$

(d)* **Теорема.** Билинейная форма Риччи равна свертке тензора Римана: $\rho(u, v) = \sum_i R(e_i, u)v \cdot e_i$.

Замечание. В определении оператора секционной кривизны (и некоторых задачах этого, но не предыдущего, пункта) экспоненциальное отображение можно заменить на произвольное отображение $f : A \rightarrow \Pi$ ($A \subset T_P$), для которого $f(tv)'|_{t=0} = v$ при любом $v \in A$ (ввиду гладкости достаточно выполнения этого условия для базисных векторов). Например, на отображение, локально обратное проекции на касательную плоскость.

Указания.

1. (a) По теореме Egregium Гаусса.

(b) Аналогично предыдущему пункту $S(\exp(hA_{u,v})) = h^2u \wedge v + o(h^2)$.

(с) Рассмотрите сферу в $\mathbf{R}^3$ (или окружность в $\mathbf{R}^2$).

3. (а) Возьмем 'естественную' кривую

$$\gamma : [0, 4h] \rightarrow D, \quad \text{для которой} \quad \gamma(0) = \gamma(4h) = P \quad \text{и} \quad \gamma[0, 4h] = \exp_P(h\partial A_{u,v}).$$

Обозначим через $w(t) = \sum_i a_i(t)r_i(\gamma(t))$ результат переноса вектора $w(0)$ вдоль отрезка $\gamma[0, t]$. Далее пропускаем аргумент t функций $w(t)$, $a(t)$, $\gamma(t)$ и их производных, а также аргумент $\gamma(t)$ отображений r_i и $dr_i = r'_i$. Далее штрих обозначает производную по t .

Напомним, что $r'_i(\gamma(t)) : \mathbf{R}^n \rightarrow T_{\gamma(t)}$ — линейный оператор. Для любого j имеем

$$0 = w' \cdot r_j = \sum_i [a'_i r_i \cdot r_j + a_i (r'_i \gamma') \cdot r_j].$$

Для фиксированной параметризации r это уравнение параллельного переноса можно представить в виде $a' = F_\gamma(\gamma')a$, где $F_P(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — линейный оператор. Тогда $w(1) = \exp[-\int_0^{4h} F_\gamma(\gamma')dt]w(0)$. Имеем

$$\int_0^{4h} F_\gamma(\gamma')dt = \int_0^h F_{vh-vt}(v)dt + \int_0^h F_{uh+vh-ut}(u)dt - \int_0^h F_{uh+vt}(v)dt - \int_0^h F_{ut}(u)dt.$$

Теперь нужное утверждение получится путем взятия начальных членов ряда Тейлора экспоненты оператора и оператора $F_P(x)$.

(d) Используйте инвариантность параллельного переноса при внутренней изометрии.

4. (а) Оператор $\sigma(A)$ ортогонален.

(b) Имеем $\sigma(A_{v,u})\sigma(A_{u,v}) = E$. Разлагая с точностью до $o(h^2)$, получаем требуемое.

(с) Следует из 4abc.

5. (а) Следует из евклидовости метрики.

(b) Достаточно доказать для $(u, v, x, y) = (he_k, he_l, e_i, e_j)$. Используйте 1b и 2a.

7. (а) Используйте 7b.

(b) Вытекает из 1a.

(с) Вытекает из 7d.

(d) Достаточно доказать для $(u, v) = (e_k, e_l)$. Используйте 1b, равенство $\tau = 2\sigma$ и выражение квадратичной формы Риччи через скалярные кривизны.

Другое указание. Поскольку геодезическая система координат евклидова, то $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + R_{ij}(u, u) + o(|u|^2)$. Из решения задачи 3а предыдущего пункта получаем $2\rho(u, u) := \sum_i R_{ii}(u, u)$. Поэтому нужное утверждение вытекает из 5b.

КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Примеры тензорных полей.

Собираются, стягиваются с разных мест вызываемые предметы, причем иным приходится преодолевать не только даль, но и давность...

В. Набоков, Королек.

Векторным полем на поверхности Π называется семейство касательных векторов $v_P \in T_P$ ($P \in \Pi$), непрерывное по P .

1. На сфере без северного и южного полюсов задано векторное поле. При стереографической проекции из *северного* полюса (точнее, при отображении, индуцированном этой проекцией) это поле переходит в постоянное векторное поле на плоскости. Переходит ли это поле в постоянное векторное поле на плоскости при стереографической проекции из *южного* полюса?

Операторным полем на поверхности Π называется семейство линейных операторов $A_P : T_P \rightarrow T_P$ ($P \in \Pi$), непрерывное по P .

Ковекторным полем на поверхности Π называется семейство ковекторов (=линейных функционалов) $\varphi_P : T_P \rightarrow \mathbf{R}$ ($P \in \Pi$), непрерывное по P .

Полем билинейных отображений (=форм) на поверхности Π называется семейство билинейных отображений $\omega_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$ ($P \in \Pi$), непрерывное по P .

Полем k -линейных отображений (=форм) на поверхности Π называется семейство k -линейных отображений $\omega_P : (T_P)^k \rightarrow \mathbf{R}$ ($P \in \Pi$), непрерывное по P .

Более точно, определенные выше векторные поля называются *касательными* векторными полями. Аналогичное замечание справедливо для операторных и других рассматриваемых полей.

2. Существует ли на торе в $\mathbf{R}^3$ поле

(a) ненулевых векторов?

(b) ненулевых ковекторов?

(c) невырожденных операторов?

(d) положительно определенных симметричных билинейных форм (билинейная форма $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ называется *положительно определенной*, если $B(a, a) > 0$ для любого $a \in V - \{0\}$)?

(e) невырожденных кососимметричных билинейных форм (билинейная форма $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ называется *невырожденной*, если для любого $a \in V - \{0\}$ найдется такой $x \in V$, что $B(a, x) \neq 0$)?

(f)* операторов $I_P : T_P \rightarrow T_P$, для которых $I_P^2 = -E$?

3. (abcdef) То же, что и в задаче 2, но для листа Мебиуса.

4. (a)* **Теорема о еже.** На сфере S^2 не существует (касательного) векторного поля из ненулевых векторов.

(b) Выведите из (a), что на сфере S^2 не существует ковекторного поля из ненулевых ковекторов.

(def) То же, что в задаче 2def, но для сферы S^2 .

5. (abef) То же, что в 2abef, но для сферы $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$, плюс

(g) невырожденных трилинейных форм;

(h) невырожденных векторных произведений.

Ответ к 2a, 3a и 5a. Да.

Указание к пунктам (b) всех задач. Если $\{v_P\}$ векторное поле, то ковекторное поле можно определить формулой $\varphi_P(u) := u \cdot v_P$.

Указание к пунктам (c) всех задач. Да, $A_P(v) := v$.

Указание к пунктам (d) всех задач. Да, $B_P(u, v) := u \cdot v$.

Указание к 2e и 4e. Да. Возьмите ориентированную площадь.

Указание к 2f и 4f. Да. Возьмите поворот касательной плоскости на $\pi/2$ для выбранной ориентации тора или сферы.

Ответ к 3ef и 5e. Нет.

Указание к 2 и 5. Постройте два или три векторных поля, линейно независимых в каждой точке. Тогда нужные объекты достаточно построить в одной точке.

Ковариантное дифференцирование функций.

0. Для функции $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ напишите определения частной производной, производной в направлении вектора (a, b) , градиента и производной — все в точке (x_0, y_0) . Имеют ли эти определения смысл для функции $f : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$?

Здесь и далее $\Pi \subset \mathbf{R}^m$ — поверхность и $f : \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ — функция.

Для $P \in \Pi$ и $u \in T_P$ через $\gamma_u = \gamma_{u,P} : [-1, 1] \rightarrow \Pi$ обозначается произвольная кривая, для которой $\gamma_u(0) = P$ и $\gamma'_u(0) = u$.

Производной функции $f : \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ в точке $P \in \Pi$ по направлению касательного вектора $u \in T_P$ (точнее, по касательному вектору $u \in T_P$) называется число $(\nabla_u f)_P := [f(\gamma_u(t))]'|_{t=0}$.

1. (a) Приведенное определение производной корректно, т.е. не зависит от выбора кривой γ_u . (Рекомендуется сначала решить следующие пункты в предположении корректности.)

(b) Зададим функцию $f : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ формулой $f(P) = \sin \angle POZ$, где $Z = (0, 0, 1)$ и $O = (0, 0, 0)$. Найдите производную этой функции в точке $(x, y, z) = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ по направлению касательного вектора $(0, 1, 0)$.

(c) $\nabla_u(f_1 + f_2) = \nabla_u f_1 + \nabla_u f_2$.

(d) $\nabla_u(fg) = (\nabla_u f)g + f\nabla_u g$.

(e) Пусть $r : D \rightarrow \Pi$ — параметризация поверхности. Выразите $(\nabla_u f)_P$ через координаты (a, b) вектора u в базисе (r_x, r_y) .

Производной (=дифференциалом) функции $f : \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ называется семейство (=поле) ∇f ковекторов (=линейных функционалов)

$$\{(\nabla f)_P\}_{P \in \Pi}, \quad \text{заданных формулой} \quad (\nabla f)_P(u) := (\nabla_u f)_P.$$

2. (a) Отображение $(\nabla f)_P : T_P \rightarrow \mathbf{R}$ действительно является линейным функционалом, т.е. $(\nabla f)_P(\lambda a + \mu b) = \lambda(\nabla f)_P(a) + \mu(\nabla f)_P(b)$.

(b) Найдите координаты производной функции из задачи 1b в произвольной точке P сферы и некотором базисе в T_P^* (выберите и укажите базис сами).

(c) $\nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$.

(d) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$.

(e) Пусть $r : D \rightarrow \Pi$ — параметризация поверхности. Найдите координаты линейного функционала $(\nabla f)_P$ в базисе $(r_x, r_y)_P$.

(f) Пусть $\varphi : D \rightarrow D$ — замена координат. Выразите базис $(\varphi \circ r)_x, (\varphi \circ r)_y$ через производную отображения φ и базис r_x, r_y .

(g) Как преобразуются координаты производной при замене координат $\varphi : D \rightarrow D$?

3. (a) Существует единственный касательный вектор градиента $(\text{grad } f)_P$ в точке P , для которого $(\nabla_u f)_P = u \cdot (\text{grad } f)_P$ при любом u .

(b) Запишите градиент функции в полярных координатах в $\mathbf{R}^2$, в сферических координатах на сфере S^2 и в сферических координатах в $\mathbf{R}^3$ (соответственно для функций $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$).

(c) Направление наибольшего роста функции в некоторой точке задается вектором ее градиента в этой точке.

(d) Линией уровня функции $f : \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ называется множество $f^{-1}(c)$, где $c \in \mathbf{R}$. Градиент перпендикулярен линии уровня.

(e) Как преобразуются координаты градиента при замене координат?

(f) Запишите в произвольной системе координат формулу для производной функции f в направлении вектора градиента функции g .

Указания к 1. Обозначим $\gamma_u(t) = r(a(t), b(t))$, $a = a'(0)$, $b = b'(0)$. Тогда $(\nabla_u f)_P = [f(r(a(t), b(t)))]'_t|_{t=0}$.

Ответ к 1e. Если

$$u = ar_x + br_y, \quad \text{то} \quad (\nabla_u f)_P = a(f \circ r)_x|_{r^{-1}(P)} + b(f \circ r)_y|_{r^{-1}(P)}.$$

Ответ к 2e. $(\nabla f)_P = ((f \circ r)_x|_{r^{-1}(P)}, (f \circ r)_y|_{r^{-1}(P)})$.

Указание к 2g. От производной требуется только то, что она является ковектором. Используйте предыдущий пункт.

Коммутатор векторных полей.

Пусть u и v — векторные поля на плоскости (или в $\mathbf{R}^n$, или на n -мерной поверхности в $\mathbf{R}^m$). При каких условиях существует система координат $r : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (или $r : \mathbf{R}^2 \rightarrow \Pi$), для которой эти поля являются координатными (т.е. $u(r(X)) = r'_X(1, 0)$ и $v(r(X)) = r'_X(0, 1)$)? Решение этой просто формулируемой, но важной задачи приводит к следующему понятию.

Коммутатором векторных полей u и v на поверхности Π называется такое векторное поле $[u, v]$, что

$$\nabla_u \nabla_v f - \nabla_v \nabla_u f = \nabla_{[u, v]} f \quad \text{для любой функции} \quad f : \Pi \rightarrow \mathbf{R}.$$

1. (a) Такое поле $[u, v]$ существует и единственно.

(b) Коммутатор обладает свойствами

- $[u, v] = -[v, u]$,
- $[\lambda u, v] = \lambda[u, v]$ и
- $[u_1 + u_2, v] = [u_1, v] + [u_2, v]$.

(c) Векторное поле v в $\mathbf{R}^n$ с декартовыми координатами $(x^1, \dots, x^n)$ называется *линейным*, если $v^i(x^1, \dots, x^n) = A^i_k x^k$, где A — некоторая постоянная матрица. Докажите, что коммутатор линейных векторных полей есть снова линейное векторное поле, и выразите его матрицу через матрицы исходных полей.

(d) Найдите выражение для коммутатора в произвольных координатах.

2. Пусть u_1 и u_2 — векторные поля на $\mathbf{R}^n$.

(a) Обозначим через

- $a_1(t)$ интегральную кривую поля u_1 , для которой $a_1(0) = P$,

- $a_2(t)$ интегральную кривую поля u_2 , для которой $a_2(0) = P$,
- $b_{1,s}(t)$ интегральную кривую поля u_1 , для которой $b_{1,s}(0) = a_2(s)$,
- $b_{2,t}(s)$ интегральную кривую поля u_2 , для которой $b_{2,t}(0) = a_1(t)$.

Докажите, что $[u_1, u_2] = 0$ тогда и только тогда, когда $b_{1,s}(t) = b_{2,t}(s)$ для любых $P \in \mathbf{R}^n$ и достаточно малых $t, s \in \mathbf{R}$.

(b) Система координат $r : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, для которой $u_1(r(X)) = r'_X(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, $u_2(r(X)) = r'_X(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ и т.д. существует тогда и только тогда, когда все эти векторные поля u_i линейно независимы в каждой точке и все их попарные коммутаторы нулевые.

3. (a) Пусть u, v — векторные поля на $\mathbf{R}^m$, касающиеся поверхности $\Pi \subset \mathbf{R}^m$. Тогда векторное поле $[u, v]$ тоже касается поверхности Π и его ограничение $[u, v]|_\Pi$ на Π совпадает с полем $[u|_\Pi, v|_\Pi]$, где $u|_\Pi$ и $v|_\Pi$ — ограничения на Π полей u и v .

(b) На единичной сфере

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

рассмотрим векторные поля

$$u = (-y, x, -w, z), \quad v_1 = (-w, -z, y, x) \quad \text{и} \quad v_2 = (-w, z, -y, x).$$

Вычислите коммутаторы $[u, v_1]$ и $[u, v_2]$.

4. (a) Любое ли ненулевое векторное поле на $\mathbf{R}^m$ можно 'выпрямить', т. е. найти систему координат, в которой компоненты этого поля будут постоянны?

(b) А ковекторное?

(c)* Пусть A — операторное поле на $\mathbf{R}^n$. Каждой паре векторных полей u, v на $\mathbf{R}^n$ сопоставим векторное поле

$$N(u, v) = A^2[u, v] - A[Au, v] - A[u, Av] + [Au, Av].$$

Ясно, что отображение $N : T_P \times T_P \rightarrow T_P$ является билинейным. Докажите, что если существует система координат, в которой матрицы операторов семейства A одинаковы, то $N = 0$.

5. (a) Приведите пример двух коммутирующих векторных полей на S^3 , линейно независимых во всех точках.

(b)* Любые три попарно коммутирующие векторные поля на трехмерной сфере S^3 линейно зависимы в некоторой точке сферы S^3 .

Указание к 5b. Иначе $S^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1$.

Ковариантное дифференцирование векторных полей.

Обозначим через pr_{T_P} ортогональную проекцию на касательную плоскость T_P .

Ковариантной производной векторного поля v на поверхности Π в точке $P \in \Pi$ по направлению касательного вектора $u \in T_P$ называется вектор

$$(\nabla_u v)_P := \text{pr}_{T_P}(v_{\gamma_u(t)})'_t|_{t=0}.$$

1. (b) Найдите ковариантную производную векторного поля $v(r, \varphi) = (\cos \varphi, -(\sin \varphi)/r)$ на плоскости в точке $(0, 2)$ в направлении вектора $(1, 1)$.

(a,c,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задач 1a,c,d,e,g из пункта 'ковариантное дифференцирование функций' для векторных полей.

У задачи 1d два аналога:

$$\nabla_u(fv) = (\nabla_u f)v + f\nabla_u v \quad \text{и} \quad \nabla_u(v_1 \cdot v_2) = (\nabla_u v_1) \cdot v_2 + v_1 \cdot \nabla_u v_2.$$

Формулу, аналогичную 1e, найдите

(e1) при условии $g_{ij} = \delta_{ij}$ в данной точке.

(e2) для общего случая.

(f) Даны линейно независимые вектора u, v и x в $\mathbf{R}^3$. Выразите через их попарные скалярные произведения коэффициенты разложения по базису u, v ортогональной проекции вектора x на плоскость, содержащую вектора u и v .

2. (a) Кривая на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда равна нулю ковариантная производная вектора ее скорости вдоль нее.

(b) Семейство векторов является параллельным вдоль кривой на поверхности тогда и только тогда, когда ковариантная производная этого семейства вдоль этой кривой равна нулю.

$$(c) [u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u.$$

3. (a) Если риманова метрика локально евклидова (см. определение в задаче 3a пункта 'билинейная форма кривизны Риччи'), то $\nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w = \nabla_{[u,v]} w$.

$$(b)^* R(u, v)w = \nabla_v \nabla_u w - \nabla_u \nabla_v w + \nabla_{[u,v]} w.$$

(c) Для поверхности $r : D \rightarrow \Pi$ в базисе (r_x, r_y) найдите (используя (b)) компоненты R^i_{jkl} .

Ковариантной производной векторного поля v на поверхности Π называется семейство линейных операторов

$$(\nabla v)_P : T_P \rightarrow T_P, \quad \text{заданных формулой} \quad (\nabla v)_P(u) := \nabla_u v.$$

4. (b) Найдите ковариантную производную векторного поля $v(r, \varphi) = (\cos \varphi, -(\sin \varphi)/r)$ на плоскости.

(a,c,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задач 2a,c,d,e,g из пункта 'ковариантное дифференцирование функций' для векторных полей.

Указание к 1. (e1) Пусть $v_{r(x,y)} = p(x, y)r_x(x, y) + q(x, y)r_y(x, y)$ — векторное поле на поверхности $r(x, y)$ и $\gamma_u(t) = r(a(t), b(t))$. Тогда

$$u = r_x a'(0) + r_y b'(0) \quad \text{и} \quad \nabla_u v = r_x ([v_{r(a(t), b(t))}]'_t|_{t=0} \cdot r_x) + r_y ([v_{r(a(t), b(t))}]'_t|_{t=0} \cdot r_y).$$

(e2) Аналогично (e1) используя (f). Или используйте (e1) и (g).

(g) От производной требуется только то, что она является оператором. Используйте закон изменения базиса в касательном пространстве при замене переменных на поверхности (т.е. задачу 2f из темы 'ковариантное дифференцирование функций').

Ковариантное дифференцирование тензорных полей.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \Pi$ — параметризованная кривая на поверхности Π . Операторное поле $A(t) : T_{\gamma(t)} \rightarrow T_{\gamma(t)}$ называется **параллельным вдоль данной кривой** (в смысле Леви-Чивита), если для любого векторного поля $v(t) \in T_{\gamma(t)}$, параллельного вдоль кривой γ , векторное поле $A(v(t))$ параллельно вдоль кривой γ .

0. (а) Придумайте пример касательного операторного поля, параллельного вдоль любой кривой.

(b) Для любых точки P ориентированной единичной сферы в $\mathbf{R}^3$ и касательного вектора v в этой точке обозначим через $R_P^{\pi/2}(v)$ вектор, полученный из v поворотом в касательной плоскости на $\pi/2$ в положительном направлении. Тогда операторное поле $R_P^{\pi/2}$ параллельно вдоль любой кривой на сфере.

(с) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы 'параллельный перенос' для операторных полей.

Пусть $u, v \in T_P$ — касательные векторы. Здесь и далее $v_u(t) \in T_{\gamma_u(t)}$ — касательное векторное поле, параллельное вдоль кривой γ_u , для которого $v_u(0) = v$.

Ковариантной производной операторного поля A на поверхности Π в точке $P \in \Pi$ по направлению $u \in T_P$ называется оператор, сопоставляющий вектору v вектор

$$(\nabla_u A)_P(v) := \operatorname{pr}_{T_P}[A_{\gamma_u(t)}(v_u(t))]'|_{t=0}.$$

Ковариантной производной операторного поля A на поверхности Π называется семейство билинейных отображений

$$(\nabla A)_P : T_P \times T_P \rightarrow T_P, \quad \text{заданных формулой} \quad (\nabla A)_P(u, v) := (\nabla_u A)(v).$$

1. (b) Для любых точки $P = (x, y, z)$ ориентированной единичной сферы в $\mathbf{R}^3$ и касательного вектора v в этой точке обозначим через $A_P(v)$ вектор, полученный из xv поворотом в касательной плоскости на $\pi/2$ в положительном направлении. Найдите ковариантную производную операторного поля A на сфере в точке $(1, 0, 0)$ по направлению вектора $(0, 1, 0)$.

(a,c,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задачи 1a,c,d1,d2,e1,e2,g из предыдущего пункта для операторных полей.

(f) *Формула Лейбница.* Если v — векторное поле (не обязательно параллельное вдоль кривой γ_u), то $(\nabla_u A)_P(v_P) = [\nabla_u(A(v))]'_P - A_P([\nabla_u v]_P)$. Напомним, что $[\nabla_u(A(v))]'_P = \operatorname{pr}_{T_P}[A_{\gamma_u(t)}(v_{\gamma_u(t)})]'|_{t=0}$.

2. (a,c,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задач 4a,c,d1,d2,e1,e2,g из предыдущего пункта для операторных полей. В e1,e2 обязательно укажите базис!

3. (а) Дайте определение параллельности ковекторного поля вдоль кривой на поверхности.

(b) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы 'параллельный перенос' для ковекторных полей.

Ковариантной производной ковекторного поля φ на поверхности Π называется поле $(\nabla\varphi)_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$ ($P \in \Pi$) билинейных отображений, заданных формулой

$$(\nabla\varphi)_P(u, v) = (\nabla_u \varphi)_P(v) := \varphi_{\gamma_u(t)}(v_u(t))'|_{t=0}.$$

4. (b) Найдите матрицу (с указанием базиса) ковариантной производной ковекторного поля, являющегося производной функции $f(x, y, z) = x$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в произвольной точке сферы.

(a,c,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задач 2a,c,d1,d2,e1,e2,g для ковекторных полей.

5. Формула Лейбница. Если $v(t) \in T_{\gamma(t)}$ — произвольное векторное поле (не обязательно параллельное вдоль кривой γ_u), для которого $v(0) = v$, то $(\nabla_u \varphi)(v) = \varphi_{\gamma_u(t)}(v(t))'_t|_{t=0} - \varphi_P(\text{pr}_{T_P} v'(0))$.

6. (а) Дайте определение параллельности поля билинейных форм вдоль кривой на поверхности.

(б) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы 'параллельный перенос' для полей билинейных форм.

Ковариантной производной поля ω билинейных отображений на поверхности Π называется семейство трilinearных отображений $(\nabla \omega)_P : T_P \times T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$ ($P \in \Pi$), заданных формулой

$$(\nabla \omega)_P(u, v, w) = (\nabla_u \omega)_P(v, w) := \omega_{\gamma_u(t)}(v_u(t), w_u(t))'_t|_{t=0}.$$

7. (б) Найдите какой-нибудь ряд (из трех элементов) трехмерной матрицы (с указанием базиса) ковариантной производной билинейной формы $x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4$ на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ в точке $(0, 0, 0, 1)$ сферы. По определению, эта билинейная форма сопоставляет паре касательных векторов (a, b) в точке (x_1, x_2, x_3, x_4) сферы число $x_1 x_2 (a_3 b_4 - a_4 b_3)$.

(а,с,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналоги задачи 2а,с,d1,d2,e1,e2,g для полей билинейных отображений.

(h) Найдите значение формы $\varphi d\varphi \wedge d\theta$ на паре касательных векторов (a, b, c) и (a', b', c') в точке $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ единичной сферы в $\mathbf{R}^3$.

8. Дайте определение параллельности вдоль кривой на поверхности и ковариантной производной поля

(а) k -линейных отображений.

(б) полилинейных отображений $(T_P)^k \rightarrow (T_P)^l$, т.е. *тензоров типа (k, l)* .

9.* $\nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jmk}^i = 0$.

10. (а,с,d1,d2,e1,e2,g) Сформулируйте и докажите аналог задачи 2а,с,d1,d2,e1,e2,g для тензоров типа (k, l) .

Симметризацией поля $\psi_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$ билинейных отображений называется поле билинейных отображений $(\text{Alt } \psi)_P : T_P \times T_P \rightarrow \mathbf{R}$, определенных формулой $2(\text{Alt } \psi)_P(u, v) := \psi_P(u, v) - \psi_P(v, u)$.

11. (а) Система дифференциальных уравнений $\partial f / \partial x^i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, разрешима тогда и только тогда, когда $\text{Alt}(\nabla \varphi) = 0$ (где φ рассматривается как ковекторное поле).

(б) Выведите формулу для $\text{Alt}(\nabla \varphi)$ в произвольных координатах.

(с) $\text{Alt}(\nabla \varphi) = \nabla_u(\varphi(v)) - \nabla_v(\varphi(u)) - \varphi([u, v])$.

Дифференциалом поля ω дифференциальных k -форм (=кососимметричных k -линейных отображений) называется поле $d\omega$ дифференциальных $(k+1)$ -форм, определенных формулой

$$(d\omega)_P(u_0, \dots, u_k) := \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\text{sgn } \sigma} (\nabla \omega)_P(u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

12. (а) $d\varphi = \text{Alt}(\nabla \varphi)$ для ковекторного поля φ .

(б) Выведите формулу для $d\omega$ в произвольных координатах.

Общее указание. Аналогично результатам о ковариантном дифференцировании функций и векторных полей.

Указание к задаче 4e1,4e2,7e1,7e2. Используйте уравнение параллельного переноса векторных полей.

ОБОБЩЕНИЕ

Элементы гиперболической геометрии Лобачевского.

Назовем *плоскостью Лобачевского* половинку $z \geq 0$ двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + 1$. Назовем *прямыми Лобачевского* сечения этой половинки плоскостями, проходящими через начало координат.

1. (а) Через точку плоскости Лобачевского, не лежащую на данной прямой Лобачевского, проходит более одной прямой Лобачевского, не пересекающей данной прямой Лобачевского.

(б) Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая Лобачевского.

(с) Для любой кривой $(x(t), y(t), z(t))$ на плоскости Лобачевского $x_t(t)^2 + y_t(t)^2 - z_t(t)^2 > 0$.

Длиной Лобачевского кривой $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, на плоскости Лобачевского называется число $\int_a^b \sqrt{x_t(t)^2 + y_t(t)^2 - z_t(t)^2} dt$. (Или, выражаясь научно, назовем *римановой метрикой Лобачевского* сужение псевдоримановой метрики $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ в $\mathbf{R}^3$ на плоскость Лобачевского.)

Далее риманова метрика g_{ij} записывается в виде $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

2. (а) Плоскость Лобачевского изометрична верхней полуплоскости с римановой метрикой Лобачевского $ds^2 = -4 \frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}$ (модель Пуанкаре в верхней полуплоскости). Далее *плоскостью Лобачевского* называется верхняя полуплоскость с римановой метрикой Лобачевского.

(б) Плоскость Лобачевского инвариантна относительно преобразований $p(w) = w + a$ и $q(w) = -1/\bar{w}$.

(с) $\operatorname{ch} |z_1, z_2| = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}$.

Указание: точки z_1 и z_2 переводятся изометрией в точки с одинаковыми абсциссами.

(с) Выведите *теорему Пифагора* для плоскости Лобачевского: $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$

Указание: можно считать $C = i$, $A = ki$ и $B = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

(d) Окружность Лобачевского является евклидовой окружностью.

(е)* Найдите длину окружности Лобачевского радиуса R .

Указание: движением плоскости Лобачевского центр окружности можно перевести в центр модели Пуанкаре в круге, затем найти связь евклидова радиуса и радиуса Лобачевского...

(f)* Сфера, плоскость и плоскость Лобачевского попарно локально не изометричны.

(g)* Любая внутренняя изометрия метрики Лобачевского, сохраняющая ориентацию, является дробно-линейным преобразованием $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ с определителем $ad - bc = 1$ (и вещественными a, b, c, d).

Геометрия на римановых многообразиях.

Римановым многообразием (локальным) называется пара (M, g) из открытого множества в $\mathbf{R}^n$ и римановой метрики g на нем.

При этом изометрического вложения $M \subset \mathbf{R}^m$ не задано!

Длины кривых и площади определяются через риманову метрику формулами, полученными ранее.

Касательным пространством T_P в точке $P \in M$ называется пространство $\mathbf{R}^n$.

Скалярная кривизна, геодезические, экспоненциальное отображение, тензор Риччи, ковариантное дифференцирование функций, касательные векторные и тензорные поля на (M, g) определяются дословно так же, как для поверхностей в $\mathbf{R}^m$.

1. Вычислите скалярную кривизну в точках

(а) плоскости Лобачевского, т.е. верхней полуплоскости с римановой метрикой $ds^2 = -4 \frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}$.

(б) плоскости с римановой метрикой $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

(с)* пространства $\mathbf{R}^n$ с римановой метрикой $ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}$.

(д)* произвольного риманова многообразия.

2. (а)* Уравнение геодезической

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0, \quad \text{где} \quad 2\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl} ([g_{lj}]_{x_i} + [g_{li}]_{x_j} - [g_{ij}]_{x_l}).$$

(б) Через каждую точку в каждом направлении проходит ровно одна геодезическая.

3. Найдите геодезические на верхней полуплоскости с римановой метрикой

(а) $ds^2 = y(dx^2 + dy^2)$; (б) $ds^2 = -4 \frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}$; (с) $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2}$.

4.* Найдите все функции $\lambda(x, y, z)$, для которых все кривые $\{y = c_1, z = c_2\}$ являются геодезическими римановой метрики $e^{\lambda(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ на $\mathbf{R}^3$.

5. Сформулируйте и докажете аналоги всех определений и теорем из темы 'билинейная форма кривизны Риччи'.

Касательное к M векторное поле v на кривой $\exp_P \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow T_P \rightarrow M$ называется **параллельным вдоль кривой** $\exp_P \circ \gamma$, если его прообраз $[\exp'_P(\gamma(t))]^{-1} v_{\exp_P(\gamma(t))}$ при производной экспоненциального отображения параллелен.

6. (а) Это определение совпадает с прежним для поверхностей в $\mathbf{R}^m$.

(б) Выпишите явно и решите уравнение параллельного переноса вдоль горизонтальной евклидовой прямой для плоскости Лобачевского.

(с) То же вдоль данной евклидовой окружности.

Определение *параллельного переноса, секционной кривизны, тензора Римана и ковариантной производной поля k -линейных форм* на (M, g) повторяет приведенное выше.

7.* (а) Для двумерного риманова многообразия $\tau = 2\sigma$, т.е. угол поворота касательного вектора при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой (ориентированной согласованно с ориентацией многообразия) и ограничивающей область A равен $\frac{1}{2} \int_A \tau dS$.

(б) Сформулируйте и докажете аналоги всех определений и теорем из темы 'тензор кривизны Римана'.

Ковариантной производной векторного поля v на M в точке $P \in M$ по направлению вектора $u \in T_P$ называется вектор $\nabla_u v := ([\exp'_P(ut)]^{-1} v_{\exp_P(ut)})'_t|_{t=0}$, т.е. производная (в точке $0 \in \mathbf{R}^n$ по направлению вектора u) прообраза векторного поля v при производной экспоненциального отображения.

8.* (а) Это определение совпадает с прежним для поверхностей в $\mathbf{R}^m$.

(б) Напишите определение ковариантной производной векторного поля на римановом многообразии.

(с) Матрица ковариантной производной векторного поля v в точке P в системе координат экспоненциального отображения есть $(\frac{\partial v^i}{\partial x^j})$.

(d) Найдите эту матрицу (с указанием базиса) для плоскости Лобачевского.

(e) Найдите эту матрицу в произвольных координатах.

(f) Докажите эквивалентность приведенного определения определению ковариантного дифференцирования векторов из [Gr90, 2.2].

(g) Разности $\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ символов Кристоффеля двух римановых метрик g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ на одном и том же M образуют тензор типа $(1, 2)$.

(h) Любой тензор типа $(1, 2)$ может быть представлен таким образом.

9.* Сформулируйте и докажите аналоги всех определений и теорем из всех тем про ковариантное дифференцирование.

10.* Определения аффинной связности и заданного ей ковариантного дифференцирования см. в [Ra04, MF04].

(a) На плоскости с координатами u, v найдите аффинную связность, относительно которой векторные поля $\xi = (e^u, 1)$ и $\eta = (0, e^v)$ ковариантно постоянны (т.е. их ковариантная производная равна нулю).

(b) Найдите (*тензор кручения*) $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ для этой связности.

(c) Существует ли риманова метрика, порождающая эту аффинную связность?

Указание к 2a. Доказывается при помощи вариационного исчисления.

Ответ к 8e. $(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma_{kj}^i v^k)$.